象數一原

象數一原卷六

錢唐項名達著　錢唐戴煦校補

諸術明變

象百變即數亦百變全體達用故無一非變全用在體故無變非一非體一而用變也前所論象爲弦矢正不惟弦矢而已一度中八綫皆是象豈遂不與數會者又不惟八綫而已盈兩間耳聞目見身觸意知者皆是象豈遂不與數會者今將舊所定弦矢求八綫術開諸乘方捷術算律管新術列於卷中是皆從遞加數轉變而得末乃列橢圜徑求周術因其淵奧

難知別立三術引其緒妙在用倍外矢後二術遞次乘除其比例不離乎零分遞加求橢弦和術又別含一種比例默具於整分遞加圖中而昭然相示者於是融兩種比例爲一比例以立本術至加減之差亦出於數之不得不然以其限於分故若分極於無分即差入於無差而徑求周之術始定向思闡明之而病軀不能從事姑發其意以俟知者此皆變之一隅也不知變無以顯從體起用之神知變而不知一無以全攝用歸體之妙余故曰會一原者始可與論百變矣

弦矢求八綫術

正弦求正切

法以正弦爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止併諸數卽正切

正弦求正割

法以半徑爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第二數置第二數以三率乘之一率除之得五率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得七率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得九率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽正割

正弦求正矢餘弦

法以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之

得三率二除之爲第一數置第一數以三率乘之一率除之得五率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十一率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽正矢正矢減半徑卽餘弦

正弦求餘割餘切

法以半徑自乘正弦除之得餘割又以正弦二除之

爲第一數次以半徑爲一率正弦爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數以減餘割卽餘切

上以正弦求者四術可得六綫其餘矢一綫正弦減半徑卽得不須求也

正矢求餘切

法以正矢減半徑爲第一數次以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率二除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數即餘切

正矢求餘割

法以半徑爲第一數次以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第二數置第二數以三率乘之一率除之得五率三乘之四除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得七率五乘之六除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得九率七乘之八除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數卽餘割

、

正矢求正弦餘矢

法以半徑爲一率正矢減半徑爲二率二率自乘一率除之得三率二除之爲第一數置第一數以三率

乘之一率除之得五率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十一率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數即餘矢餘矢減半徑即正弦

正矢求正割正切

法以半徑自乘正矢減半徑除之得正割又以正矢減半徑二除之爲第一數次以半徑爲一率正矢減

半徑爲二率二率自乘一率除之得三率置第一數以三率乘之一率除之得四率四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得六率三乘之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得八率五乘之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得十率七乘之十除之爲第五數如是遞乘遞除求至單位下止并諸數以減正割即正切

上以正矢求者四術亦得六綫其餘弦一綫即正矢減半徑數用爲二率者也

正矢減半徑旣卽餘弦以求諸綫自與正弦等惟互爲正餘八術實祇四術也正弦之求正割較正切升一率求餘切較餘弦升一率而其術則等正矢之求餘割正切亦然四術實祇二術也今備列之亦便於取用耳

附圜周求徑

以周二除之爲第一數次置第一數四除之爲第二數次置第二數三乘之十六除之爲第三數次置第三數三乘之五乘之三十六除之爲第四數次置第四數五乘之七乘之六十四除之爲第五數次置第

五數七乘之九乘之一百除之為第六數次置第六數九乘之十一乘之一百四十四除之為第七數累求得小數小至單位下止廼并第二數以下諸數轉減第一數即圜徑

杜氏術有徑求周無周求徑向思補之而不得其方蓋以連比例全恃半徑為一率無徑則比例無可施也後因研究橢圜竊歎遞加數蘊含之神妙斟定平圜周求橢圜周術廼類推而得此所惜者除法微嬴於乘法降位頗難求至百餘數八位尚未消盡固不足為術也惟確知其得數的是圜徑

而數所由來又別自一理非假途於徑求周者且以徑求周參校之周主奇徑主偶三奇數之始故求周起三乘遞次以奇數自乘爲乘法而以越次之奇數自乘減一爲除法二偶數之始故求徑起二除遞次以偶數自乘爲除法仍以挨次之偶數自乘減一爲乘法此蓋奇偶相從乘除互易殆有自然之象數寓乎其閒爰附載於此後有好學深思者或因此變通之另補其術俾周徑得以互求則更妙矣

開諸乘方捷術

第一術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍大者用爲借積本積共若干位從尾位起依廉率數截而爲段以首段積對表檢取其根爲借根截積爲幾段卽知本根有幾位因於借根下亦作圖位補足之若欲增求零數幾位再補幾圖借積內減本積餘爲減積以借積除減積得數爲遞次乘法乘法由除而得皆在單位下其數不盡視借根連圖共幾位卽截幾位爲乘法又以本乘方乘數加一爲廉率遞置借根爲第一數次置第一數乘法乘之視乘法乘位下於單一共幾位亦於乘得數自乘位起截去幾位以暗藏單一之除故也今乘借根有圖位視圖有幾則少截幾位廉率除之爲第二數除出數亦不盡除至實末位止其下一位除後滿五進爲一不滿五棄其零次置第二數乘法乘

之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數次置第三數乘法乘之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數次置第四數乘法乘之三因廉率減一乘之四因廉率除之爲第五數如是挨次乘除得數漸降至單位下止前增求零數加增二位至單下二位止增三位或四位至單下三位四位止併第二數以下諸數與第一數相減得本乘方根單下一位零數滿五進爲一而根微弱不滿五棄其零而根微强若零數共二位上一位空共三位或四位上二位空及上三位空者則棄其末位之零而根得整數

第二術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍小者用爲借

積其根爲借根本積內減借積餘爲減積以本積除
減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉
率遞置借根爲第一數次置第一數乘法乘之廉率
除之爲第二數次置第二數乘法乘之廉率加一乘
之二因廉率除之爲第三數次置第三數乘法乘之
二因廉率加一乘之三因廉率除之爲第四數次置
第四數乘法乘之三因廉率加一乘之四因廉率除
之爲第五數如是挨次乘除得數至單位下止併第
二數以下諸數與第一數相加得本乘方根術中檢表定位
收零棄零等法均與第一術同至諸數加併後亦視
單下一位零數滿五進爲一而根微弱不滿五棄其

零而根微强惟零數共二位上一位滿九共三位或四位上二位滿九及上三位滿九者則增其末位之零進爲一而根得整數

按是二術互相爲用如術推算乘除一例而不煩惟患減積大降位稍難須求多數耳減積之大由本積稍遠於借積然本積居表中大小二積之間去小積遠去大積必近則用第一術去大積遠去小積必近則用第二術兩者相資其術始備且一盈一歉一減一加不易中自有交易者在此亦陰陽對待之理寓乎數中而不容有所偏局也

補第一術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍小者用爲借積其根爲借根本積內減借積餘爲減積以借積除減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉率遞置借根爲第一數正次置第一數乘法乘之廉率除之爲第二數正次置第二數乘法乘之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數負次置第三數乘法乘之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數正次置第四數乘法乘之三因廉率減一乘之四因廉率除之爲第五數負如是挨次乘除得數至單位下止併正數與併負數相減得本乘方根

是術與前第一術同法惟前術第二數下皆負是
術第二數下奇數負偶數正

補第二術

以本乘方積檢開方表其積較本積稍大者用爲借
積其根爲借根借積內減本積餘爲減積以本積除
減積得數爲遞次乘法又以本乘方乘數加一爲廉
率遞置借根爲第一數正次置第一數乘法乘之廉
率除之爲第二數負次置第二數乘法乘之廉率加
一乘之二因廉率除之爲第三數正次置第三數乘
法乘之二因廉率加一乘之三因廉率除之爲第四

數負次置第四數乘法乘之三因廉率加一乘之四因廉率除之爲第五數正如是挨次乘除得數至單位下止併正數與併負數相減得本乘方根

是術與前第二術同法惟前術第二數下皆正是術第二數下奇數正偶數負

總論曰遞乘遞除術以開方平方向嘗爲八線互求之用戴君鄂士對數簡法亦用之而未能推及諸乘方者以乘多則比例難尋廉式又繁而不可御也由今思之遞乘遞除其數生於比例而成於遞加以比例論平方以借根爲一率減積之根爲二率求得三

率因以一率三率爲逐數比例蓋遞閒一率也而立方則閒二率三乘方則閒三率每多一乘則多閒一率約計其數無論一率四率相比一率五率相比要皆與本乘之積比積等故概用借積或本積除其減積爲遞次乘法以遞加論平方廉率二乘法起于第三數之一與三由是以三五七九等奇數乘得各數除法起於第二數之二由是以四六八十等偶數除得各數蓋遞加以二也而立方則遞加三三乘方則遞加四推之諸乘廉雖多種而本乘數加一實爲諸廉總率故概取廉率二因三因爲除法後加減其一

爲乘法此兩種乘除相須爲用有連比例以引其緒
復有遞加數以就其闕平方如是諸乘方卽莫不如
是也苟明乎其故以御他術當亦無不可通而開方
乃算學初階廉雜商難得此已無復慮好學深思者
本是術而引伸觸類焉其爲用可勝窮哉

先生專刻開諸乘方捷術補術論曰初得前二術
未經校驗晤鄂士戴君語及開方余謂諸乘方之
根積連比例也其廉率遞加數也若以遞乘遞除
開之諸乘方可通爲一例鄂士以爲然翼日治定
前稿將以質鄂士而鄂士已有見於此簡示兩術

一借大積與前第一術相合一借小積其得數則正負相間余既喜第一術之得所印證又思此正負相間者較前第二術雖降位稍遲而在數中其術實所應備何則第一術借大積則本積爲小積故以借積比減積第二術借小積則本積爲大積故以本積比減積是比例皆用大積也夫大積可比例豈小積獨不可比例今此正負相間術借小積卽以小積比減積以是推之當更有借大積仍以小積比減積而與爲對待者因續衍一術復以質鄂士而鄂士復有見於此出其稿若合符節焉

蓋鄂士推闡四元於方廉正負之理深入三昧故觸而郎通如此爰取鄂士稿補列於後命曰補第一術補第二術得此而術乃大備兼以誌兩人心得之同云爾按此四術者煦皆與有力然皆先生之發其緘也

開方表

方根	平方（一乘）	立方（再乘）	三乘方	四乘方	五乘方
一	一	一	一	一	一
二	四	八	一六	三二	六四
三	九	二七	八一	二四三	七二九
四	一六	六四	二五六	一〇二四	四〇九六
五	二五	一二五	六二五	三一二五	一五六二五
六	三六	二一六	一二九六	七七七六	四六六五六
七	四九	三四三	二四〇一	一六八〇七	一一七六四九
八	六四	五一二	四〇九六	三二七六八	二六二一四四
九	八一	七二九	六五六一	五九〇四九	五三一四四一

方根	六乘方	七乘方	八乘方
一	一	一	一
二	一二八	二五六	五一二
三	二一八七	六五六一	一九六八三
四	一六三八四	六五五三六	二六二一四四
五	七八一二五	三九〇六二五	一九五三一二五
六	二七九九三六	一六七九六一六	一〇〇七七六九六
七	八二三五四三	五七六四八〇一	四〇三五三六〇七
八	二〇九七一五二	一六七七七二一六	一三四二一七七二八
九	四七八二九六九	四三〇四六七二一	三八七四二〇四八九

方根	九乘方	十乘方
一	一	一
二	一〇二四	二〇四八
三	五九〇四九	一七七一四七
四	一〇四八五七六	四一九四三〇四
五	九七六五六二五	四八八二八一二五
六	六〇四六六一七六	三六二七九七〇五六
七	二八二四七五二四九	一九七七三二六七四三
八	一〇七三七四一八二四	八五八九九三四五九二
九	三四八六七八四四〇一	三一三八一〇五九六〇九

方根	十一乘方	十二乘方
一	一	一
二	四〇九六	八一九二
三	五三一四四一	一五九四三二三
四	一六七七七二一六	六七一〇八八六四
五	二四四一四〇六二五	一二二〇七〇三一二五
六	二一七六七八二三三六	一三〇六〇六九四〇一六
七	一三八四一二八七二〇一	九六八八九〇一〇四〇七
八	六八七一九四七六七三六	五四九七五五八一三八八八
九	二八二四二九五三六四八一	二五四一八六五八二八三二九

算律管新術

算律以三分損益隔八相生其法始於管子後世宗之至於仲吕應生黃鍾稽其數不及黃鍾一分有奇遂有謂仲吕極不生者京房引而伸之別生執始至南事爲六十律要非律吕眞數故宋志譏其失旋宫之義因少增其數使仲吕復生黃鍾然數雖無幾豈容妄以義意增者惟明鄭世子朱載堉則曰律家三分損一三分益一猶歴家四分度之一四分日之一與夫方五斜七周三徑一皆舉大略言之非精義也新法算律用勾股術本諸周禮㮚氏爲量內方尺而

圜其外夫內方尺而圜其外則圜徑與方斜同知方之斜卽知圜之徑矣方尺卽黃鍾圜徑卽㽂實由㽂實可得南吕由南吕可得應鍾旣得應鍾則終始循環諸律皆可相生安有往而不返之理案世子因𣑱氏爲量悟得方圜相函而正律倍律半律之數寓乎其閒以勾股開方得之較之三分損益所得者微强而不甚遠由是或倍或半比例回還其數一出於自然無仲吕不能復生黃鍾之患眞乃闡前人所未發足以破盡積疑矣顧其入算先開平方求得㽂實倍律次得南吕倍律再開立方求得應鐘倍律然後與

黃鐘相比例求倍正半諸律夫律有十二必先求蕤賓南吕應鐘三者舍此三者別無術可以逕求餘律法尚局而不能通三律遞求而得其尾位數先得者既不能無收棄繼得者必愈有盈虧數亦疎而不能密或用平方或用立方或用比例殊非一例類又雜而不能齊故取數雖眞立術未善因思世子所定律數連比例也能求此連比例者諸乘方也通諸乘方爲一例無所謂難與易者遞乘遞除術也展轉研窮審定一術專用黃鐘遍求不必借象於方圜亦不必假途於勾股但本律數十二及所求律距黃鐘之位

數遞乘遞除相併減卽諸律可得其數與開方所得者脗合以擬古法蓋皆自黃鐘左旋下生而不拘於隔八其生林鐘所損者不及三分之一此實由律數位數自然而生絕不待安排造作者次列於後亦聊備律家術算之一助云爾

鄭世子勾股開方算律法

世子以方尺卽黃鐘有十寸之尺有九寸之尺今用九寸爲黃鐘以便與古律相校法曰內方東西九寸爲勾南北九寸爲股各自乘得八十一寸相併得一百六十二寸爲弦實平方開之得一尺二寸七分二

釐七毫九絲二忽有奇爲方之斜即圜之徑亦即蕤
賓倍律又以勾九寸乘之得一百十四寸五十五分
一十二釐九十八毫五十五絲有奇爲平方實開得
一尺○七分○二毫八絲六忽有奇即南呂倍律復
以勾九寸乘之股九寸再乘之爲得八百六十六寸
九百三十一分九百八十六釐八百三十毫有奇爲
立方實開得九寸五分三釐五毫一絲六忽有奇即
應鐘倍律廼以應鐘倍律爲一率黃鐘正律爲二率
復置黃鍾正律二率乘之一率除之得大呂二率乘
大呂一率除之得太簇二率乘太簇一率除之得夾

鐘如是遞求至應鐘得各正律倍之得各倍律半之得各半律今如法算得各正律列於上層更列古律於下層以便參校

開方比例算得諸律	古律
黃鐘九寸	九寸
大呂八寸四分九釐四毫八絲七忽	八寸四分二釐七毫九絲八忽
太簇八寸〇分一釐八毫〇絲九忽	八寸
夾鐘七寸五分六釐八毫〇絲七忽	七寸四分九釐一毫五絲三忽
姑洗七寸一分四釐三毫三絲一忽	七寸一分一釐一毫一絲一忽
仲呂六寸七分四釐二毫三絲八忽	六寸六分五釐九毫一絲四忽

蕤賓六寸三分六釐三毫九絲六忽　六寸三分二釐〇毫九絲九忽

林鐘六寸〇分〇釐六毫七絲八忽　六寸

夷則五寸六分六釐九毫六絲五忽　五寸六分一釐八毫六絲五忽

南呂五寸三分五釐一毫四絲三忽　五寸三分三釐三毫三絲三忽

無射五寸〇分五釐一毫〇絲八忽　四寸九分九釐四毫三絲六忽

應鐘四寸七分六釐七毫五絲八忽　四寸七分四釐〇毫七絲四忽

此所謂律數皆連比例也記曰比音而樂之律之音必相比此而後諸律之數亦必相比而後合今考其數黃鐘比大呂若大呂與太簇亦若太簇與夾鐘凡相距一位者皆成比例黃鐘比太簇若太簇與姑洗亦

若姑洗與蕤賓凡相距二位者皆成比例位苟同即比例無不同推之相距十二位則黃鐘倍律比正律亦必若正律與半律比例既通自無往而不返之患若古律相距一位二位以至多位有成比例者亦有不成比例者既不相比即不相生強生焉其數已差正不待至仲呂而始極即以隔八相生論之曰隔八實祇相距七位古法下生者三與二之比上生者三與四之比今法下生者三與二〇〇二二六之比上生者三與四〇〇四五二之比兩者相校所差奇零數原屬無多故古律用以諧音大致亦合然既少此

奇零其比例與黃鐘倍正半律數全不相涉至仲呂
愈差而少所生者不得復爲黃鐘今所得律之比例
數皆自正倍半律而生故倍仲呂生黃鐘可以上生
倍律下生正律正仲呂生黃鐘可以上生正律下生
半律以是觀之古律僅得其似惟世子所定律始得
其眞也至求律之法需用開方者亦以律數旣成連
比例而黃鐘之倍律正律半律實總此連比例以爲
之樞其閒諸律視距黃鐘幾位因位數而知比例因
比例而知黃鐘正與半之遞相乘與所求律遞自乘
其積必等故開方可得如正黃鐘與半黃鐘相乘與

蕤賓自乘等積開平方得蕤賓求倍蕤賓亦此法此世子所用者細繹之不惟蕤賓可求正黃鐘自乘乘半黃鐘與姑洗再乘等積開立方得姑洗半黃鐘自乘乘正黃鐘與夷則再乘等積開立方得夷則正黃鐘再乘乘半黃鐘與夾鐘三乘等積開三乘方得夾鐘半黃鐘再乘乘正黃鐘與南呂三乘等積開三乘方得南呂正黃鐘四乘乘半黃鐘與太簇五乘等積開五乘方得太簇半黃鐘四乘乘正黃鐘與無射五乘等積開五乘方得無射正黃鐘十乘乘半黃鐘與大呂十一乘等積開十一乘方得大呂半黃鐘十乘

乘正黃鐘與應鐘十一乘等積開十一乘方得應鐘正黃鐘六乘乘半黃鐘四乘與仲呂十一乘等積開十一乘方得仲呂半黃鐘六乘乘正黃鐘四乘與林鐘十一乘等積開十一乘方得林鐘蓋此諸律位數雖不若蕤賓之與黃鐘相當而以自乘再乘等通其比例亦可以得等積所難者諸乘方開煩繁重故世子第求蕤賓一律不復以黃鐘遍求今則用遞乘遞除術轉變而消融之覺律本同源法歸一例亦足極比例開方之變而濟其所窮矣

新定算律術

法曰十二律爲律數所求律上距黃鐘幾位爲位數以二爲遞次除法迺置黃鐘爲第一數次置第一數位數乘之律數除之二除之爲第二數次置第二數位數與律數相減乘之二因律數除之二除之爲第三數次置第三數位數與二因律數相減乘之三因律數除之二除之爲第四數次置第四數位數與三因律數相減乘之四因律數除之二除之爲第五數如是挨次乘除得數漸小至單位下止迺併第二數後諸數與第一數相減得所求律

算式

黃鍾求大目　位數一

黃鍾九〇〇〇〇

乘除	數
一乘二四除	三七五〇〇
一一乘四八除	八五九三七五
二三乘七二除	二七四五二二
三五乘九六除	一〇〇〇八六
四七乘一二〇除	三九二〇〇
五九乘一四四除	一六〇六一
七一乘一六八除	六七八八
八三乘一九二除	二九三四
九五乘二一六除	一二九〇
一〇七乘二四〇除	五七五
一一九乘二六四除	二五九
一三一乘二八八除	一一八
一四三乘三一二除	〇五四
一五五乘三三六除	〇二五
一六七乘三六〇除	〇一一
一七九乘三八四除	〇〇五
一九一乘四〇八除	〇〇二
二〇三乘四三二除	〇〇一

黃鍾求大簇　位數二

黃鍾九〇〇〇〇

乘除	數
二乘二四除	七五〇〇
一〇乘四八除	一五六二五
二二乘七二除	四七七四三〇
三四乘九六除	一六九〇九〇
四六乘一二〇除	六四八一八
五八乘一四四除	二六一〇七
七〇乘一六八除	一〇八七七
八二乘一九二除	四六四六
九四乘二一六除	二〇二二
一〇六乘二四〇除	八九三
一一八乘二六四除	三九九
一三〇乘二八八除	一八〇
一四二乘三一二除	〇八二
一五四乘三三六除	〇三七
一六六乘三六〇除	〇一七
一七八乘三八四除	〇〇八
一九〇乘四〇八除	〇〇四
二〇二乘四三二除	〇〇二

併二數下諸數得　五〇五一三〇六

與第一數相減得八四九四八六九四

黃鐘求夾鐘　位數三

黃鐘九〇〇〇〇

三乘二四除一一二五〇〇

九乘四八除二一〇九三七五

二一乘七二除六一五二三四

三三乘九六除二一一四八七

四五乘一二〇除七九三〇八

五七乘一四四除三一三九三

六九乘一六八除一二八九四

八一乘一九二除五四三九

九三乘二一六除二三四二

一〇五乘二四〇除一〇二五

一一七乘二六四除四五四

一二九乘二八八除二〇三

一四一乘三一二除〇九二

一五三乘三三六除〇四二

二一四乘四五六除　〇〇一

併二數下諸數得　九八一九一一四

與第一數相減得八〇一八〇八八六

黃鐘求姑洗　位數四

黃鐘九〇〇〇〇

四乘二四除一五〇〇〇

八乘四八除二五〇〇

二〇乘七二除六九四四四四

三二乘九六除二三一四八一

四四乘一二〇除八四八七六

五六乘一四四除三三〇〇七

六八乘一六八除一三三六〇

八〇乘一九二除五五六七

九二乘二一六除二三七一

一〇四乘二四〇除一〇二七

一一六乘二六四除四五一

一二八乘二八八除二〇〇

一四〇乘三一二除〇九〇

一五二乘三三六除〇四一

一六五乘三六〇除　〇一九
一七七乘三八四除　〇〇九
一八九乘四〇八除　〇〇四
二〇一乘四三二除　〇〇二
二一三乘四五六除　〇〇一
併二數下諸數得一四三一九三二三
與第一數相減得七五六八〇六七七

黃鐘求仲呂　位數五
黃鐘九〇〇〇〇〇
五乘二四除　一八七五〇〇
七乘四八除　二七三四三七五
一九乘七二除　七二一五七一
三一乘九六除　二三三〇〇七
四三乘一二〇除　八三四九四
五五乘一四四除　三一八九〇
六七乘一六八除　一二七一八
七九乘一九二除　五二三二
九一乘二一六除　二二〇五
一〇三乘二四〇除　九四七

一六四乘三六〇除　〇一九
一七六乘三八四除　〇〇九
一八八乘四〇八除　〇〇四
二〇〇乘四三二除　〇〇二
二一二乘四五六除　〇〇一
併二數下諸數得一八五六六九五〇
與第一數相減得七一四三三〇五〇

黃鐘求蕤賓　位數六
黃鐘九〇〇〇〇〇
六乘二四除　二二五〇〇〇
六乘四八除　二八一二五
一八乘七二除　七〇三一二五
三〇乘九六除　二一九七二六
四二乘一二〇除　七六九〇四
五四乘一四四除　二八八三九
六六乘一六八除　一一三三〇
七八乘一九二除　四六〇三
九〇乘二一六除　一九一六
一〇二乘二四〇除　八一五

一一五乘二六四除四二一
一二七乘二八八除○二八
一三九乘三一二除○一八
一五一乘三三六除○六三
一六三乘三六○除○六一
一七五乘三八四除○七○
一八七乘四○八除○三○
一九九乘四三二除○一○
二一一乘四五六除○○○
併二數下諸數得二二五七六一七七
與第一數相減得六七四二三八三二

黃鐘求林鐘　位數七
黃鐘九○○○○○
七乘二四除二六二五○○
五乘四八除二七三四三五七
一七乘七二除六四五五六六一
二九乘九六除一九五○○三
四一乘一三○除六六六五三
五三乘一四四除二四五五二

一一四乘二六四除三二五
一二六乘二八八除一四五
一三八乘三一二除○八六
一五○乘三三六除○○三
一六二乘三六○除○三一
一七四乘三八四除○六○
一八六乘四○八除○三○
一九八乘四三二除○一○
二一○乘四五六除○○○
併二數下諸數得二六三六○三六八
與第一數相減得六三六三九六四一

黃鐘求夷則　位數八
黃鐘九○○○○○
八乘二四除三○○○○
四乘四八除二五○○○
一六乘七二除五五五五五五
二八乘九六除一六二○七三
四○乘一二○除五四○二一
五二乘一四四除一九五四○

六五乘一六八除　九四八九
七七乘一九二除　三八〇五
八九乘二一六除　一五六八
一〇一乘二四〇除　六六〇
一一三乘二六四除　二八二
一二五乘二八八除　一二二
一三七乘三一二除　〇五四
一四九乘三三六除　〇二四
一六一乘三六〇除　〇一一
一七三乘三八四除　〇〇五
一八五乘四〇八除　〇〇七
一九七乘四三二除　〇〇一
併二數下諸數得二九九三二一九五
與第一數相減得六〇〇六七八〇五

黃鐘求南呂　位數九
黃鐘九〇〇〇〇〇〇
九乘二四除三三七五〇〇〇
三乘四八除二一〇九三七五
一五乘七二除四三九四五三

六四乘一六八除　七四三〇
七六乘一九二除　二九四一
八八乘二一六除　一九八
一〇〇乘二四〇除　四九九
一一二乘二六四除　二一一
一二四乘二八八除　〇九一
一三六乘三一二除　〇四〇
一四八乘三三六除　〇一八
一六〇乘三六〇除　〇〇八
一七二乘三八四除　〇〇三
一八四乘四〇八除　〇〇一
一九六乘四三二除　〇〇〇
併二數下諸數得三三三〇三五四〇
與第一數相減得五六六九六四六〇

黃鐘求無射　位數十
黃鐘九〇〇〇〇〇〇
十乘二四除三七五〇〇〇〇
二乘四八除一五六二五〇
一四乘七二除三〇三八一九

二七乘一九六除一二三五 六九
三九乘一二〇除四〇一 九六
五一乘一四四除一四二 六二
六三乘一六八除五三 五三
七五乘一九二除二〇 四八
八七乘二一六除八 九三
九九乘二四〇除三 六四
一一一乘二六四除一 六四
一二三乘二八八除〇 二六
一三五乘三一二除〇 七一
一四七乘三三六除〇 二一
一五九乘三六〇除〇 五〇
一七一乘三八四除〇 二〇
一八三乘四〇八除〇 一〇
併二數下諸數得三六四八五六 八七
與第一數相減得五三五一四三 二二

二六乘一九六除八二二二 四八
三八乘一二〇除二六〇 七五
五〇乘一四四除九〇 八四
六二乘一六八除三三 九三
七四乘一九二除一二 七八
八六乘二一六除五 二一
九八乘二四〇除二 九〇
一一〇乘二六四除〇 七八
一二二乘二八八除〇 七三
一三四乘三一二除〇 六一
一四六乘三三六除〇 七〇
一五八乘三六〇除〇 三〇
一七〇乘三八四除〇 一〇
一八二乘四〇八除〇 〇〇
併二數下諸數得三九四八九二 六〇
與第一數相減得五〇五一〇七 四九

黃鐘求應鐘　位數十一

黃鐘九〇〇〇〇〇

一一乘二四除四一二五〇〇

一乘四八除	八五九三五七
一三乘七二除	一五五一五六
二五乘九六除	四〇四七〇
三七乘一二〇除	一二四九五
四九乘一四四除	四二九三
六一乘一六八除	一五九三
七三乘一九二除	五五八
八五乘二一六除	二〇三
九七乘二四〇除	〇三九
一〇九乘二六四除	〇八三
一二一乘二八八除	〇七一
一三三乘三一二除	〇六〇
一四五乘三三六除	〇三〇
一五七乘三六〇除	〇一〇

并二數下諸數得四二三三二四一

與第一數相減得四七六七五八

以上遞乘除算得律數與開方所得者脗合緣是術

本可開方向立有四術今術本之而微有不同約舉四術中第一術以與今術相參校法借所知積稍大於本積者用爲借積內減本積爲減積遞次比例以借積爲除法減積爲乘法本乘方數加一爲廉率遞置借積之根爲第一數以比例乘除之廉率除之爲第二數又比例乘除之廉率減一乘之二因廉率除之爲第三數又比例乘除之二因廉率減一乘之三因廉率除之爲第四數如是遞次乘除至單位下止併二數後諸數以減第一數得所求根此術每求一數用兩種乘除一用積爲比例乘除一用廉率爲遞

加乘除以此開方諸乘方無不可得今求律數如前所列平立三乘開非一類惟先齊以十一乘方冪其各積比例之差繼復使比例齊同約其差而歸於廉率末乃省去廉率不用而寓之於律數位數中故與向立術大同而小異蓋律有十二至十一乘諸律始得其會通如黃鐘正律十一乘爲正黃鐘積用爲借積各律之積爲本積黃鐘正律十乘乘半律爲大呂本積得借積二之一黃鐘正律九乘乘半律自乘爲太簇本積得借積四之一黃鐘正律八乘乘半律再乘爲夾鐘本積得借積八之一至黃鐘正律乘半律

十乘爲應鐘本積得借積三千零四十八之一每降一律正律減一乘半律增一乘借積分母亦增一倍此各律比例之差而廉率則同爲十二究其差所由來大呂積二之一者以其距黃鐘一位左旋一周十二律會於黃鐘半律故太簇積四之一者以其距黃鐘二位左旋二周二十四律會於黃鐘四之一故夾鐘積八之一者以其距黃鐘三位左旋三周三十六律會於黃鐘八之一故應鐘積二千零四十八之一者以其距黃鐘十一位左旋十一周一百三十二律會於黃鐘二千零四十八之一故設欲使比例齊同

皆爲二之一應各以距黃鐘位數除之除二周二十四律三周三十六律以及十一周一百三十二律恐爲一周十二律而廉率所用之全律十二其數亦隨除而降大呂廉率以一除故仍爲一餘則皆降太簇廉率六夾鐘廉率四姑洗廉率三仲呂廉率二又五之二蕤賓廉率二林鐘廉率一又七之五夷則廉率一又八之四南呂廉率一又九之三無射廉率一又十之二應鐘廉率一又十一之一如是則積之比例等廉率各不等比例等故遞次皆用二除廉率不等而又帶零故省去不用仍用十二而寄其位數之除

凡應以廉率除者先乘以位數後乃除以十二應以廉率減一爲乘法者則以十二減位數爲除法雖不用廉率而廉率自寓其閒也以是觀之理本相通而術則已變本律居黃鐘正律半律之閒由比例乘除自正律而降從半律由遞加乘除復自半律而約歸本律其數不煩造作皆從律位而生位爲天然素定之位因是而得數卽爲天然自具之數謂非律呂眞數而何

古法下生者三分損一三之一卽十二之四故四乘黃鐘十二除之得林鐘應損數若先二除黃鐘八乘

之十二除之亦得林鐘應損數何則二除者損黃鐘二之一以從半律也八乘十二除者借半律作相當比例半律隔十二位則損黃鐘二之一林鐘隔八位應損黃鐘三之一也是八乘蓋由乎隔八今考其位非隔八而實只距七特七乘則損數尚歉故增爲八耳迨觀今術求林鐘第二數只以七乘其所歉數尚待三數後遞次相補總計之仍較八乘爲微歉以是知古法不特位數誤七爲八暗藏之乘法先已誤七爲八矣

古法上生者三分益一易損一爲益一只是加倍法

盡仍屬左旋下生半律因加倍故得全律亦眞上生也至遞乘除術可以黃鐘左旋下生各律亦可以各律右旋上生黃鐘其上生之法與前術同惟三數後乘法減位數易爲加位數得諸數併之減第一數易爲加第一數雖一減一加亦猶是一損一益而右旋實大異於左旋所以不立爲術者以乘法用加嫌其降位稍難耳而其術固自在也

橢圜求周術

法以大徑爲徑求得平圜周爲第一數次以橢圜大半徑爲第一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半

徑為第三率殛置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之為第二數次置第二數以三率乘之一率除之三乘之四自乘除之為第三數次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之為第四數次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之為第五數次置第五數以三率乘之一率除之七乘之九乘之十自乘除之為第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數下皆負正負相減即橢圜周

橢圜大徑作平圜取一象限勻析為幾分以平

圜逐分通弦和求相應之橢圜逐分通弦和如平圜象限析為二分則作四十五度正弦亦截分橢圜象限析為二分如平圜象限析為三分則作三十度六十度兩正弦亦截分橢圜象限為三分平圜逐分弧等通弦亦等橢圜逐分弧不等通弦亦不等雖一等一不等而逐分相應

先求本數各數內尚有加減差故先求者命為本數法置平圜逐分通弦和為第一數次以橢圜大半徑為第一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑為第三率廼置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之為第二數次置第二數以三率乘之一率除之三乘之四自乘除之為第三數次置第三數以三率乘之一率除之三乘

之五乘之六自乘除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數次置第五數以三率乘之一率除之七乘之九乘之十自乘除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數下皆負

次定應加應減之各數法置弧分二乘之加一視爲幾則第幾數起以下各數中各有加差加差爲正弧分四乘之加一視爲幾則第幾數起以下各加差中又各有減差減差爲負弧分六乘之加二視爲幾則第幾數起以下各減差中又各有加差弧分八乘之加一視爲

幾則第幾數起以下各加差中又各有減差如是遞以偶數乘弧分加一定應加應減之各數

次求第一次加差先定乘除法以二爲應加第一數乘法倍分加一乘第一數乘法爲第二數乘法倍分加二乘第二數乘法（此所言第一數第二數專指應加數言非本數之第一數第二數也）二除之爲第三數乘法倍分加三乘第三數乘法三除之爲第四數乘法如是遞加一乘除之得各乘法又視倍分爲幾則後幾數之乘法折半即爲其前幾數之除法（如弧分二則倍分爲四應加之第五數乘法折半即第一數除法應加之第六數乘法折半即第二數除法）迺置應加各數各以乘法乘之除法

除之得第一次各加差皆正
次求第二次減差亦先定乘除法以一爲應減第一
數乘法三因倍分加一爲第二數乘法三因倍分加
二乘第二數乘法二除之爲第三數乘法三因倍分
加三乘第三數乘法三除之爲第四數乘法又視倍
分爲幾則後幾數之乘法即爲其前幾數之除法逓
置第一次加差中應減各差各以乘法乘之除法除
之得第二次各減差皆負
以下求加減各差皆以一爲第一數乘法第三次加
差五因倍分加一第四次減差七因倍分加一第五

次加差九因倍分加一爲第二數乘法下皆遞加一
乘除之得各乘法其除法皆視倍分爲幾則後幾數
乘法即爲前幾數除法乘除減差得各加差皆正乘
除加差得各減差皆負
末求橢圓逐分通弦和法以正數相併負數亦相併
正負相減即橢圓逐分通弦和

用表求加減差乘除法

求第一加差以倍弧分加一視爲幾取表中第幾行
自首位起挨位而下倍其數爲逐數乘法又視倍分
加一爲幾自第幾位起挨位而下即其數爲逐數除

法第二減差三因倍分加一視爲幾取表中第幾行自首位起按位而下卽其數爲逐數乘法又視倍分加一爲幾自第幾位起按位而下卽其數爲逐數除法以下皆同逐次遞以奇數乘倍分加一取行數乘法皆自首位起除法皆自倍分加一之位起

案橢圓弧線無可驗驗之以逐分通弦和今求本數與求橢周同術所異者有加減差耳一象限析分愈多則橢弦漸與弧合加減差愈後而其差亦愈微析至無量分則橢弦和卽橢圜象限亦無加減差可言矣

補求加減差表

三行	五行	七行	九行
一	一	一	一
三	五	七	九
六	一五	二八	四五
一○	三五	八四	一六五
一五	七○	二一○	四九五
二一	一二六	四六二	二八七
二八	二一○	九二四	○○三
三六	三三○	一七一六	四三五
四五	四九五	三○○三	八七○
五五	七一五	五○○五	三一○
六六	一○○一	八○○八	七五八
七八	一三六五	一二三七六	五八二
九一	一八二○	一八五六四	九七○
一○五	二三八○	二七一三二	四九○
一二○	三○六○	三八七六○	七七○
一三六	三八七六	五四二六四	三一四

	十二行	十三行
	一	二
	一二	一三
	六六	九一
	二八六	四五五
	一○○一	一八二○
一	三○○三	六一八八
三	八○○八	一八五六四
六	一九四四八	五○三八八
一二	四三七五八	一二五九七○
二四	九二三七八	二九三九三○
四三	一八四七五六	六四六六四六
七五	三五二七一六	一三五二○七八
一二五	六四六六四六	二七○四一五六
二○三	一一四四○六六	五二○○三○○
三一九	一九六一二五六	九六五七七○○
四九○	三二六八七六○	一七三八三八六○

十五行	十七行	十九行
一	一	一
一五	一七	九
一二〇	一五三	〇
六八〇	九六九	〇
三〇六〇	四八四五	五
一一六二八	二〇三四九	九
三八七六〇	七四六一三	六
一一六二八〇	二四五一五七	〇
三一九七七〇	七三五四七一	五
八一七一九〇	二〇四二九七五	五
一九六一二五六	五三一一七三五	〇
四四五七四〇〇	一三〇三七八九五	〇
九六五七七〇〇	三〇四二一七五五	五
二〇〇五八三〇〇	六七八六三九一五	五
四〇一一六六〇〇	一四五四二二六七五	〇
七七五五八七六〇	三〇〇五四〇一九五	〇

廿一行	
一	
二一	一
二三一	一九
一七七一	一三三
一〇六二六	七三一
五三一三〇	三三六四
二三〇二三〇	一三四五九
八八八〇三〇	四八〇七〇
三一〇八一〇五	一五六二二七
一〇〇一五〇〇五	四六八六八二
三〇〇四五〇一五	一三一二三一一
八四六七二三一五	三四五九七二九
二二五七九二八四〇	八六四九三二二
五七三一六六四四〇	二〇六二五三〇七
一三九一九七五六四〇	四七二四三五六〇
三二四七九四三一六〇	一〇三七一五八三二

廿三行	廿五行
一	一
二三	二五
二七六	三二五
二三〇〇	二九二五
一四九五〇	二〇四七五
八〇七三〇	一一八七五五
三七六七四〇	五九三七七五
一五六〇七八〇	二六二九五七五
五八五二九二五	一〇五一八三〇〇
二〇一六〇〇七五	三八五六七一〇〇
六四五一二二四〇	一三一一二八一四〇
一九三五三六七二〇	四一七二二五九〇〇
五四八三五四〇四〇	二五一六七七七〇〇
一四七六三三七八〇〇	五六二四六七三〇〇
三七九六二九七二〇〇	六六九五五四一〇〇
九三六四一九九七六〇	一四〇八四〇六六〇

廿九行	廿七行	
一	一	
二九	二七	
四三五	三七八	
四四九五	三六五四	
三五九六〇	二七四〇五	
三七三三六	一六九九一一	
四四九〇四	九〇六一九二	
二四五二〇	四二七二〇四八	
六〇三四〇	一八一五六二〇四	
〇三六二〇	七〇六〇七四六〇	
三三七五六	二五四一八六八五六	
五六〇四四	八五四九九二一五二	
五三四八〇	二七〇七四七五一四八	一
七六三六〇	八一二二四二五四四四	三
二九〇八〇	二三二〇六九二九八四〇	九
五六六九六	六三四三二二七四八九六	二五

三千行	
一	
三一	
一•四九六	
五四五六	
四六三七六	
三二四六三二	二
一九四七七九二	一三
一〇二九五四七二	六七
四八九〇三四九二	三〇二
二一一九一五一三二	一二四四
八四七六六〇五二八	四七二七
三一五九四六一九六八	一六七六〇
一一〇五八一一六八八八	五五八六八
三六五七六八四八一六八	一七六二〇〇
一一四九五五八〇八五二八	五二八六〇二
三四四八六七四二五五八四	一五一五三二六

三十三行
一
三三
五六一
六五四五
五八九〇五
四三五八九七
二七六〇六八一
一五三八〇九三七
七六九〇四六八五
三五〇三四三五六五
一四七一四四二九七三
五七五二〇〇四三四九
二一〇九〇六八二六一三
七三〇〇六二〇九〇四五
二三九八七七五四四〇〇五
七五一六一六三〇四五四九

照按右求加減差表即整分遞加數第一圖左線所聯各行乃諸乘三角堆積也求加減差皆用奇數行故不列偶行求法以一爲第一位數行數乘之二除之爲二位數又行數加一乘之三除之爲

三位數又行數加二乘之三除之為四位數又行數加三乘之四除之為五位數如是遞以行數加一二三四等數為乘法又一二三四等數為除法得逐位數捷法併前行一二位數加本行首位數得二位數併前行一二三位數加本行二位數得三位數併前行自一至四位數加本行三位數得四位數如是遞併遞加得逐位數又法倍本位數內減上一位數加前行下一位數得本行下一位數今求至十六行行十六位以起例不敷用者依法求之

平圜一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦如析平象限爲二分則取一分四十五度三分百三十五度兩通弦析平象限爲三分則取一分三十度三分九十度五分百五十度之一通弦求與平弧相應之逐分橢圜通弦

法以一分平圜通弦爲第一數取各奇分通弦各自乘半徑除之各減四半徑爲各倍外矢寄左又以大半徑爲一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三率若先四除爲三率以下逐數可省四除今不省者欲爲倍外矢明其用也置第一數各以定三率乘之一率除之得三率四除之二除之爲第二數次置

第二數各以定三率乘之一率除之得五率四除之四除之爲第三數次置第三數各以定三率乘之一率除之得七率三乘之四除之六除之爲第四數次置第四數各以定三率乘之一率除之得九率五乘之四除之八除之爲第五數次置第五數各以定三率乘之一率除之得十一率七乘之四除之十除之爲第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數起下皆負正負相減卽逐分橢圜通弦用一分倍外矢求得第一分橢弦用三分倍外矢求得第二分橢弦用五分倍外矢求得第三分橢弦總以倍外矢弧分加一折半數卽爲所求橢弦之第幾分

按求逐分橢弦第一數同用一分平弦以下各數亦同一乘除法惟所用三率則各不同以各有所用倍外矢故也三率內各藏一倍外矢五率內各藏一倍外矢自乘數七率內各藏一倍外矢再乘數遞降兩率即遞增一乘故各率之差悉由於各奇分倍外矢必究明倍外矢不齊之致而後可立法齊之也

平圓一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求與平圓自半分起遞加全分弧相應之橢圓逐分抵周線如一象限析爲二分取一分三分兩通弦求與半分二十

二度三十分及二分半六十七度三十分相應之橢圓兩抵周線析為三分取一分三分五分三通弦求與半分十五度一分半四十五度二分半七十五度相應之橢圓三抵周線

法以大半徑為第一數取各奇分通弦各自乘半徑除之各減四半徑為各倍外矢又以大半徑為一率小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑為泛三率以乘各奇分倍外矢一率除之為定三率四除之二除之為第二數次置第二數各以三率乘之一率除之得五率四除之四除之為第三數次置第三數各以三率乘之一率除之得七率三乘之四除之六除之為第四數次置第四數各以三率乘之一率除之得

九率五乘之四除之八除之為第五數次置第五數各以三率乘之一率除之得十一率七乘之四除之十除之為第六數依次遞乘遞除得數漸小至單位下止第一數正第二數起下皆負正負相減即得自半分起遞加全分之橢圓各抵周線

按此術與求逐分橢弦術同惟第一數不用平圓一分通弦而用半徑以是知橢圓自小徑端半分起遞加全分之各抵周線比其自大徑端起之逐分橢弦若半徑與平圓一分通弦也

總論曰以上四術求橢圓周為本術後三術為求橢

周所由來故備載之有抵周線術而各橢弦可求有橢弦術而各橢弦和可求橢弦和既可求橢圜周郎無不可求其用全在逐分倍外矢各三率不齊須以倍外矢齊之倍外矢不齊又須以半徑齊之所以能齊其不齊者則恃有遞加數一圖與之婉轉而符會觀後圖解便可洞然夫求平圜弧線非遞加數而其率不通今求橢圜弧線亦復如是然則圜理無窮一遞加數有以括之矣誠妙矣哉

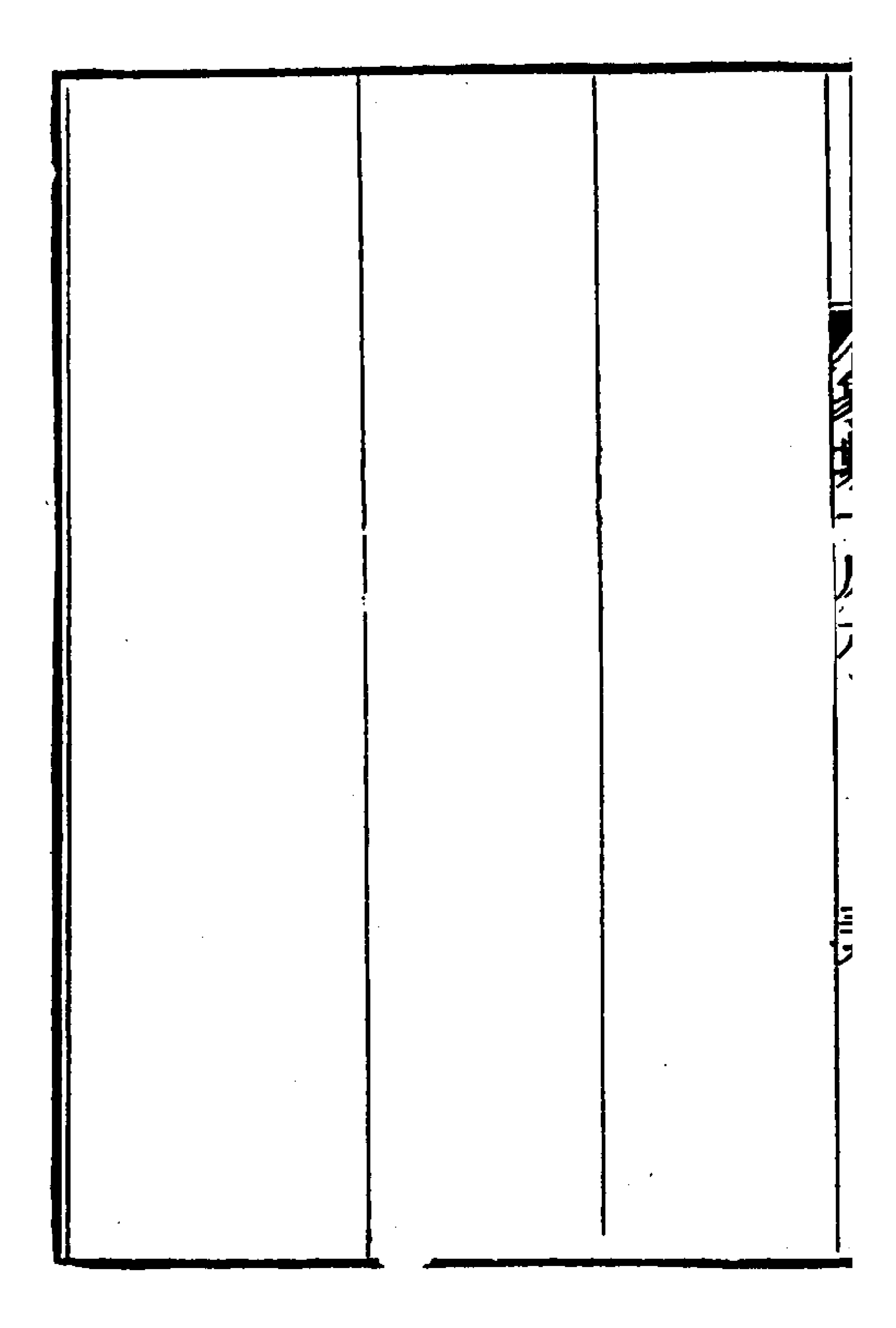
煦按總論云觀後圖解便可洞然而圖解實未有

頗疑非完本迨觀本卷首云向思纂明之而病軀

不能從事姑發其意以俟知者始知　先生素有此志以疾作不果非闕也惟術意淵奧非累牘不能明了茲爲補纂圖解另編一卷附後

仁和高雲

新陽趙元



象數一原卷七

錢塘戴

橢圓求周圖解

凡橢圓與小徑平行橫截之其各線皆與內容平圓之通弦相應又與大徑平行直截之其各線皆與外切平圓之通弦相應其橫截線引長至外切圓界爲外圓若干度通弦則此橫截橢圓線必爲內圓若干度通弦又其直截線過內容圓界爲內圓若干度通弦則此直截橢圓線必爲外圓若干度通弦如圖甲己丙戊爲橢圓甲丙爲大徑己戊爲小徑甲乙丙丁

爲外切平圓其圓徑甲丙卽大徑庚巳辛戊爲內容平圓其圓徑巳戊卽小徑從圓心作心午心壬心癸三線則外圓午甲壬弧必與內圓辰庚卯弧同度內圓卯巳未弧必與外圓壬乙癸弧同度試作午壬外圓通弦截橢圓界於寅於子而寅子必同辰卯卽內圓與午甲壬弧同度之通弦又試作卯未內圓通弦復引長之截橢圓界於子

於丑則子丑必同壬癸卽外圓與卯巳未弧同度之通弦故午壬與寅子卽卯辰之比同於丁乙與戊巳之比以大小同度兩通弦比大小兩圓徑卯未與子丑卽壬癸之比同於庚辛與甲丙之比亦兩通弦比兩圓徑而全與全原同於半與半則酉壬比酉子必同於心乙比心巳而申未比申丑亦同於心辛比心丙矣

凡橢圓外切平圓平分一象限爲若干分弧每弧作通弦於通弦下端各作橫截線截橢圓界爲若干分弧亦每弧作通弦其外平圓逐分弧相等通弦亦相等橢圓逐分弧不等通弦亦不等復從平橢兩通弦

上端各作直線與橫截線取直角遂成各種勾股形其兩相應之通弦所成勾股必同用一股而勾則平大而橢小其逐分大小兩勾之比例皆同於大小半徑之比例如圖甲癸爲橢圓象限甲乙爲平圓象限甲心心乙皆大半徑心癸爲小半徑平分甲乙爲甲丙丙丁丁戊戊乙相等之四分弧作甲丙丙丁丁戊戊乙相等之四通弦於是從丙至子從丁至戌從戊至亥各作橫截線截橢圓象限爲甲巳巳庚庚

壬壬癸四弧亦作甲巳巳庚庚壬壬癸四通弦復從各通弦上端作已丑及丙申庚寅及丁酉壬卯及戊未各直線成各種勾股形而已丑與丙申同庚寅與丁酉同壬卯與戊未同故第一甲子巳與甲子丙第二已丑庚與丙申丁第三庚寅壬與丁酉戊第四壬卯癸與戊未乙均爲同用一股之兩勾股形其兩形之勾必楕弦所成者小而平弦所成者大其子丙大勾與子巳小勾之比本同於大小半徑義見前圖而申丁及酉戊及未乙三大勾與丑庚及寅壬及卯癸三小勾之比無不同於大小半徑何也凡兩種四率比例

其一二率同者以兩原三率之較爲三率則四率必爲兩原四率之較今若以大小半徑爲一二率則子丙爲三率者子巳爲四率戌丁爲三率者戌庚爲四率亥戊爲三率者亥壬爲四率而申丁爲子丙戌丁兩三率之較丑庚爲子巳戌庚兩四率較故比例同大小半徑酉戊爲戌丁亥戊兩三率較寅壬爲戌庚亥壬兩四率較故比例亦同大小半徑又凡四率比例仍其原一二率而以原一率與三率之較爲三率則四率必爲原二率與四率之較今未乙爲三率亥戊與一率大半徑心乙之較卯癸爲四率亥壬與二

率小半徑心癸之較故比例亦同大小半徑也
凡橢圓內容平圓平分一象限爲若干分弧每弧作
通弦於通弦上端作直截線引長之截橢圓界爲若
干分弧亦每弧作通弦其內平圓逐分弧與弦俱相
等橢圓逐分弧與弦俱不等
復從平橢兩通弦下端作橫
線與直截線取直角成各種
勾股形其平橢兩相應之通
弦所成勾股必同用一勾而
股則平小而橢大其逐分大

小兩股之比例皆同於大小半徑之比例如圖巳乙爲橢圓象限甲乙爲內容平圓象限甲心心乙均小半徑巳心爲大半徑如前平分甲乙象限爲四分弧作四通弦於是從申至庚從未至辛從午至壬各作直截線亦截橢圓爲四分弧仍作四通弦復從通弦下端作丑壬及寅戌等橫線成各種勾股形其第一戊午乙與壬午乙第二丁寅戌與辛丑壬第三丙卯丁與庚子辛第四甲辰丙與巳癸庚均爲同用一勾之兩勾股形其兩形之股必橢弦所成者大而平弦所成者小其壬午大股與戊午小股之比本同大小

半徑之比而辛丑與丁寅庚子與丙卯巳癸與甲辰皆同於大小半徑之比蓋大小半徑爲一二率則壬午或辛未或庚申爲三率者必戊午或丁未或丙申爲四率而辛丑與庚子均爲三率之較丁寅與丙卯均爲四率之較巳癸爲三率與一率之較甲辰爲四率與二率之較故其比例皆同大小半徑也（理詳前圖）以上二圖皆析弧爲四分以起例雖悉至多分其比例之相同莫不皆然

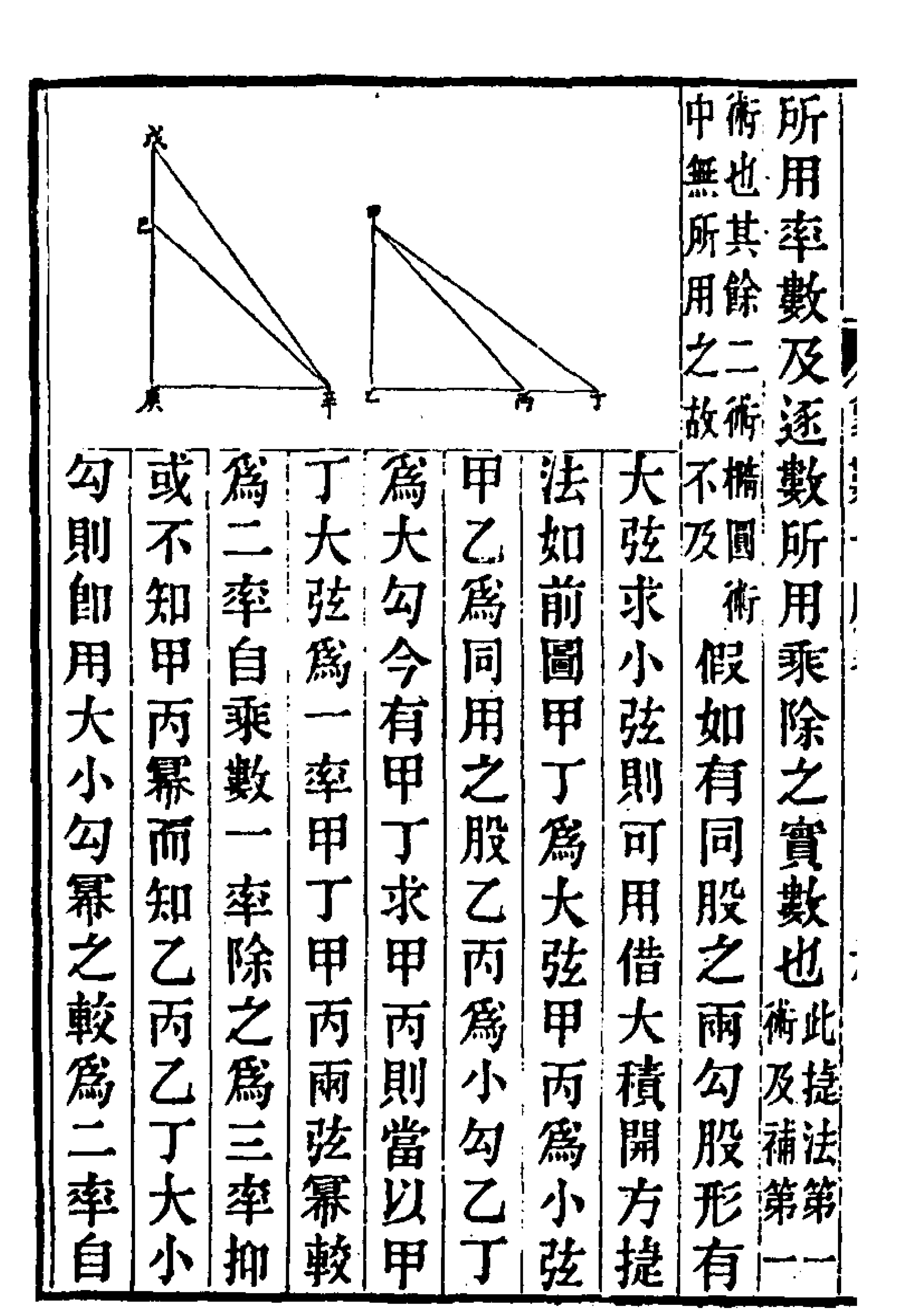
橢圓求周生於開平方捷法前卷捷法兼及諸乘而諸乘之廉率各不同卽所用率數亦不同故難名以

第幾率而逐數乘除亦但以加倍廉率及加減二隱括其數今既專論平方且欲令通於橢圓當明其所用何率及逐數乘除之實數矣凡借大積而卽以大積除減積爲遞次乘法者係用大積借根爲一率大積內減本積爲二率自乘數一率借根除之爲三率求法以一率爲第一數正置三率二除之（二卽平方廉率）爲第二數負置第二數以三率乘之一率除之得五率一乘之（卽廉率減一）四除之（卽二因廉率下可類推）爲第三數負置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第四數負置第四數以三率乘之一率除之得

九率五乘之八除之爲第五數負如是遞求乃併諸負數減正數而得方根其借小積而以小積除減積爲乘法者係以小積借根爲一率本積內減小積爲二率自乘數一率借根除之爲三率求法以一率爲第一數正置三率二除之爲第二數正置第二數以三率乘之一率除之得五率一乘之四除之爲第三數負置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之爲第四數正置第四數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之爲第五數負如是遞求乃併諸正數又併諸負數減之而得方根此開平方

所用率數及逐數所用乘除之實數也此捷法第一術及補第一術也其餘二術橢圓術中無所用之故不及

假如有同股之兩勾股形有大弦求小弦則可用借大積開方捷法如前圖甲丁爲大弦甲丙爲小弦甲乙爲同用之股乙丙爲小勾乙丁爲大勾今有甲丁求甲丙則當以甲丁大弦爲一率甲丁甲丙兩弦冪較爲二率自乘數一率除之爲三率抑或不知甲丙冪而知乙丙乙丁大小勾則卽用大小勾冪之較爲二率自



乘數何也凡弦冪爲勾股冪之共今甲丁弦冪內含甲乙股冪及乙丁句冪甲丙弦冪內亦含甲乙股冪乙丙勾冪以兩弦冪相較則甲乙股冪可對消而所餘爲兩弦冪之較者正兩勾冪之較故亦即二率自乘數也又如有同勾之兩勾股形有小弦求大弦則可用借小積開方捷法如後圖戊辛爲大弦巳辛爲小弦庚辛爲同用之勾戊庚爲大股巳庚爲小股今有巳辛求戊辛則當以巳辛小弦爲一率戊庚巳庚兩股冪之較爲二率自乘數一率除之爲三率理與前同特求法不同前用借大積法故第一數正而第

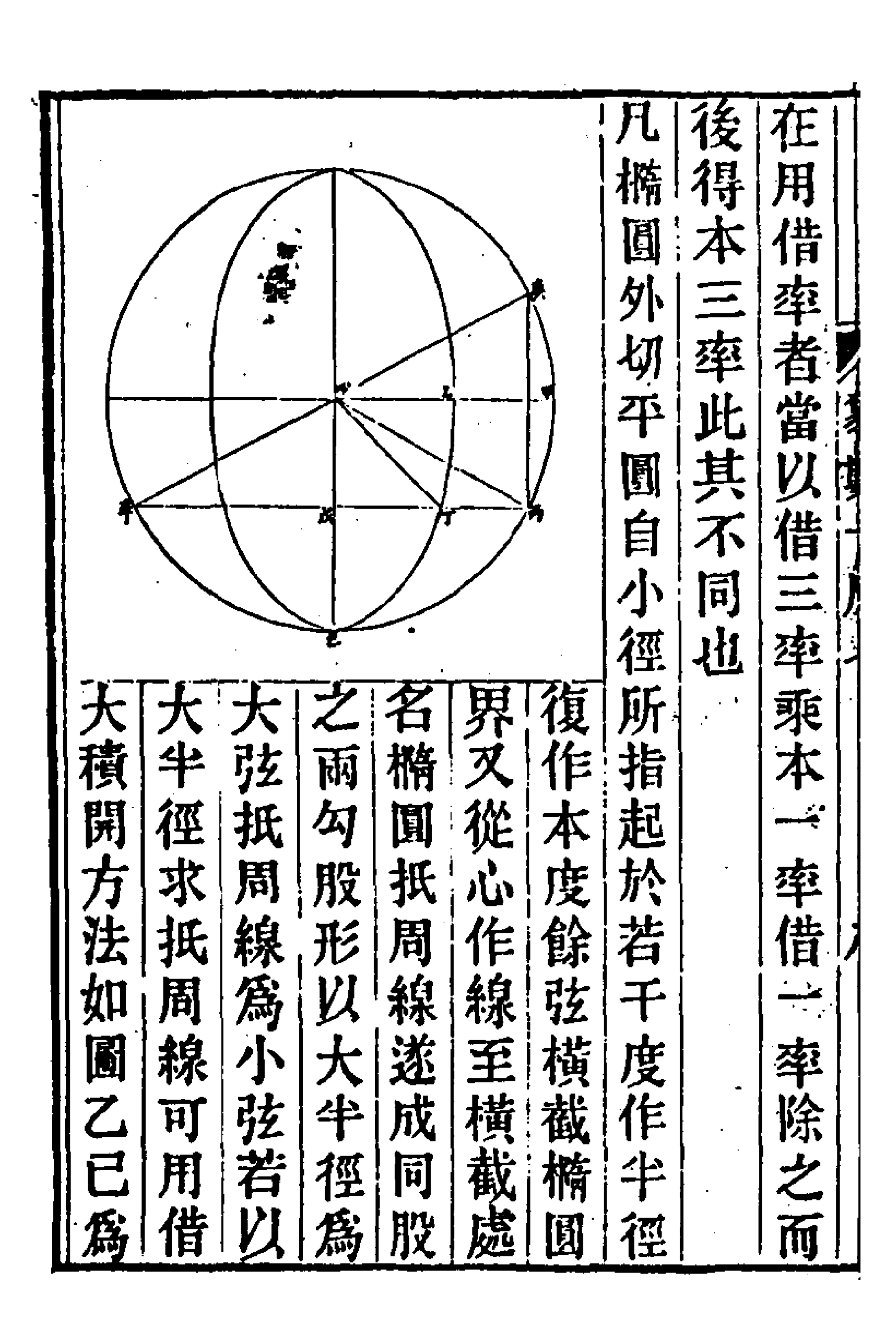
二數以下皆負後用借小積法故第一數正而第二數以下耦數正奇數負也

凡不論求大小弦其用爲一率之弦爲本一率（求大弦則小弦爲本一率求小弦則大弦爲本一率）本一率除二率自乘數爲本三率如不用本率則可借用比例相同之他率如圖甲丁爲大弦甲丙爲小弦設有甲丁求甲丙則甲丁爲本一率有甲丙求甲丁則甲丙爲本一率而皆以本一率除乙丙與乙丁兩冪之較爲本三率今有戊巳

庚辛形與甲乙丙丁形線線平行爲同式形則戊辛與戊辛除巳庚巳辛兩冪較之比必同於甲丁大弦本一率與本三率之比戊庚與戊庚除巳庚巳辛兩冪較之比必同甲丙小弦本一率與本三率之比夫此兩數之比例同於彼兩數之比例則用此兩數一乘一除與用彼兩數一乘一除得數必同故大弦求小弦可用戊辛爲借一率戊辛除兩冪較爲三率小弦求大弦可用戊庚爲借一率戊庚除兩冪較爲借三率蓋借三率乘又借一率除卽如以本三率乘又本一率除也惟第二數則在用本率者徑用本三率

在用借率者當以借三率乘本一率借一率除之而後得本三率此其不同也

凡橢圓外切平圓自小徑所指起於若干度作半徑



復作本度餘弦橫截橢圓界又從心作線至橫截處名橢圓抵周線遂成同股之兩勾股形以大半徑爲大弦抵周線爲小弦若以大半徑求抵周線可用借大積開方法如圖乙巳爲

橢圓象限甲巳爲平圓象限心甲心巳皆大半徑心乙爲小半徑甲爲小徑所指甲丙爲所設弧度心丙亦大半徑丙戊爲本弧餘弦即庚丙倍弧外通弦丙辛二分之一戊丁爲橫截橢圓線心丁爲橢圓抵周線成心戊丁丙同股之兩勾股形心丙爲大弦心丁爲小弦如有心丙求心丁當以心丙爲連比例一率以戊丁橫截線與戊丙二分倍弧外通弦之一之兩冪較爲二率自乘數一率心丙除之爲三率而心甲自乘冪與心甲心乙兩冪較之比同於戊丙自乘冪與戊丙戊丁兩冪較之比凡四率比例其原一二率各自乘之比必同於原三

四率各自乘之比其一率與一二率較之比又必同於三率與三四率較之比今心甲與心乙其比例原同戊丙與戊丁則心甲冪與心乙冪其比例必同於戊丙冪與戊丁冪而心甲冪與心甲心乙兩冪較其比例亦必同於戊丙冪與戊丙戊丁兩冪較矣故求二率自乘數者以心甲大半徑自乘冪比心甲大半徑心乙小半徑兩冪較後編大半徑為弦小半徑為股求得勾為兩心差此徑冪較即兩心差冪若戊丙二分倍弧外通弦之一自乘冪與戊丙戊丁兩冪較即二率自乘數也

一率　大半徑冪

二率　大小半徑兩冪較

三率　四分倍弧外通弦冪之一二分之一自乘為四分冪之一

四率　二率自乘數

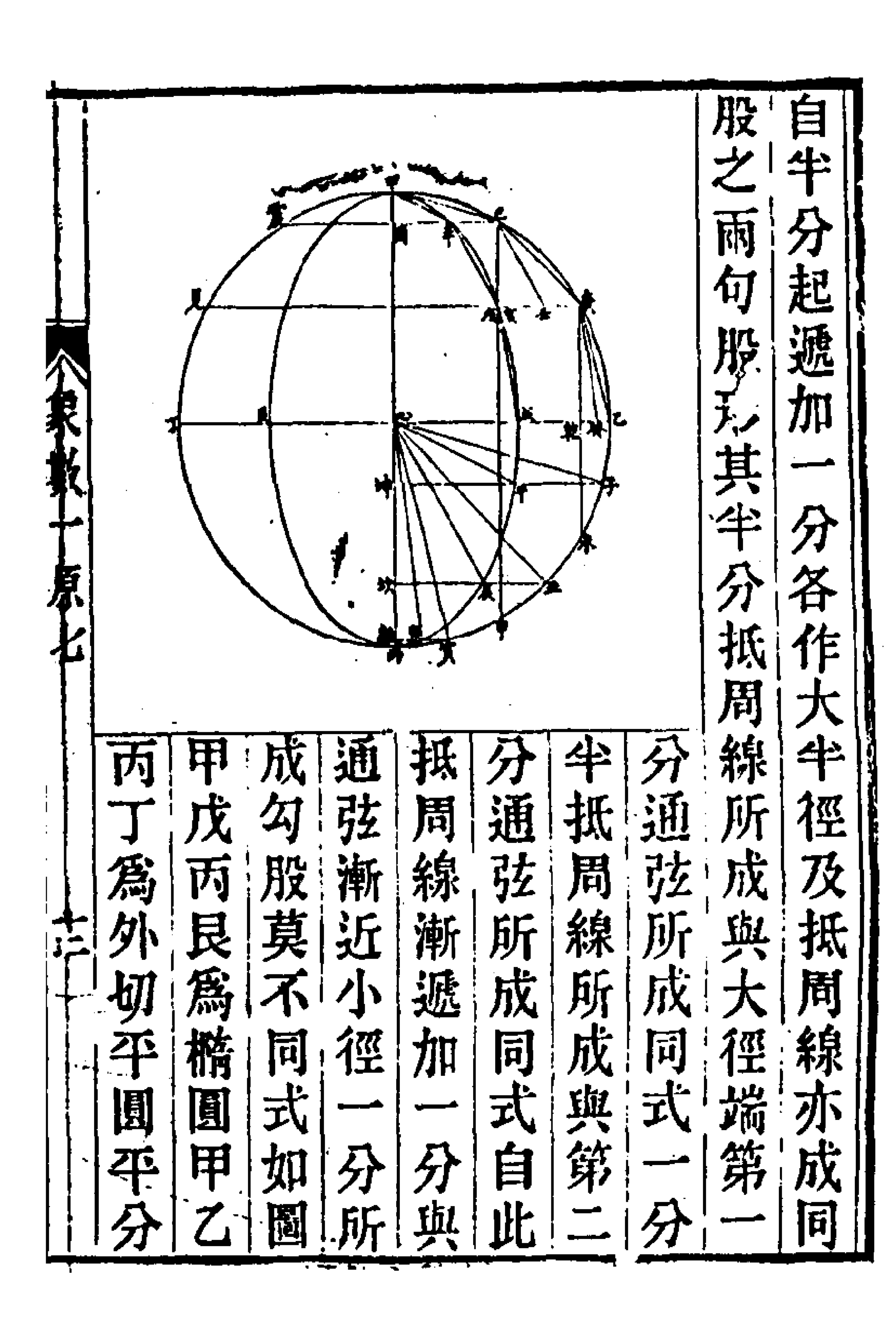
既得二率自乘數於是以大半徑除之得連比例三率若不求二率自乘數而先以大半徑除所列四率之前三率則求得四率亦必爲大半徑除過之二率自乘數而卽所求連比例三率矣故以大半徑除一率大半徑冪仍得大半徑爲一率又除二率得大半徑除徑冪較爲二率卽小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑之數術中所謂泛三率也又除三率得四分倍弧倍外矢之一半徑與通弦與倍矢爲三率連比例故以半徑除四分通弦冪之一得四分倍矢之一所得四率卽求抵周線之連比例三率也

一率　大半徑
二率　小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑
三率　四分倍弧倍外矢之一
四率　求抵周線三率
此用四分倍外矢之一故求得四率卽求抵周線之
三率若徑用倍外矢爲三率則所得必爲求抵周線
三率之四倍卽術中所謂定三率故每數增四除也
凡橢圓內容平圓自大徑所指起於若干度作半徑
又作本度餘弦復引長直截橢圓界從圓心至直截
處作橢圓抵周線成同勾之兩句股形小半徑爲小

弦抵周線為大弦若以小半徑求抵周線可用借小積開方法如圖乙甲為橢圓象限丙甲為平圓象限心丙心甲皆小半徑心乙為大半徑丙為大徑所指丙庚為所設弧度心庚亦小半徑巳庚為所設弧餘弦即辛庚倍弧外通弦庚丁二分之一巳戊為直截橢圓線心戊為橢圓抵周線成心巳庚戊同句之兩句股形心庚為小弦心戊為大弦如以心庚求心戊則當以心庚為連比例一率其求連比例三率當以

小半徑冪為一率大小半徑冪較為二率四分倍弧外通弦冪之一為三率求得四率為二率自乘數小半徑除之為連比例三率若依前徑求連比例三率則當以小半徑為一率小半徑除徑冪較為二率即大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑四分倍外矢之一為三率求得四率即為求抵周線之連比例三率又若徑用倍外矢為三率則所得之四率亦為求抵周線三率之四倍也

凡橢圓外切平圓平分一象限為若干分弧逐分作平橢兩通弦各成同股之兩句股形又從小徑所指



自半分起遞加一分各作大半徑及抵周線亦成同股之兩句股形其半分抵周線所成與大徑端第一分通弦所成同式一分半抵周線所成與第二分通弦所成同式自此抵周線漸遞加一分與通弦漸近小徑一分所成勾股莫不同式如圖甲戊丙艮爲橢圓甲乙丙丁爲外切平圓平分

甲乙象限爲三分各作通弦又作橢圓相應之通弦復移橢圓辛戌於巳壬移戌戌於庚癸遂成甲酉辛巳與巳亥壬庚與庚乾癸乙三同股之兩勾股形又引巳亥線至申點庚乾線至未點亦分乙丙象限爲三分從乙子半分乙丑一分半乙寅二分半各作大半徑從徑端各作餘弦橫截橢圓界從心至橫截處各作抵周線又成心坤午子與心坎辰丑與心離卯寅三同股之兩勾股形此三形與通弦所成者同式何也甲巳酉界角對甲震一分弧則巳角必得半分弧度酉甲巳界角對丙巳五分弧則甲角必得二分

半弧度（凡界角對弧為本角倍度）今心子坤角與乙心子角在兩平行線內其角必等而乙心子角對乙子半分弧則子角亦必得半分弧度子心坤角對子丙弧亦為二分半弧度是甲酉巳形與心坤子形角度相同必同式也巳庚亥界角對巳兌三分弧亥巳庚界角對庚申三分弧則庚角巳角皆得分半弧度心丑坎角與乙心丑角等得分半弧度丑心坎角亦得分半弧度是巳亥庚形與心坎丑形同式也至庚乾乙形與甲酉巳形一橫一豎本屬相同心寅離形與心坤子形亦屬相等是庚乾乙形與心寅離形又同式也而酉

已與酉辛亥庚與亥壬乾乙與乾癸其比例皆同大小半徑坤子與坤午坎丑與坎辰離寅與離卯其比例亦同大小半徑其甲酉巳等平圓通弦所成勾股形既與心坤子等大半徑所成勾股形同式則甲酉辛等橢圓通弦所成勾股形亦必與心坤午等抵周線所成勾股形同式矣前條大弦求小弦不用本率者可用借率是有甲巳平通弦求甲辛橢通弦者可用心子大半徑爲借一率以小半徑自乘大半徑除之轉減大半徑名泛三率以乘一分弧乙子之倍倍外矢大半徑除之得借三率之四倍爲定三率有巳庚求

巳壬者可用心丑大半徑爲借一率泛三率乘三分弧乙丑之倍倍外矢大半徑除之爲定三率有庚乙求庚癸者可用心寅大半徑爲借一率泛三率乘五分弧乙寅之倍倍外矢大半徑除之爲定三率矣

凡橢圓內容平圓平分一象限爲若干分弧逐分作平橢兩通弦所成同句之兩勾股形與從大徑所指自半分起遞加一分各作小半徑及抵周線所成同勾之勾股形兩兩同式如圖甲乙丙丁爲橢圓戊乙巳丁爲內容平圓平分戊乙象限爲三分各作通弦又作橢圓相應之通弦復移庚辛至辰癸移戊庚至

子壬遂成癸辛卯乙與壬辰寅癸與甲子丑壬三同勾之兩勾股形又自庚作橫線至申自辛作橫線至酉亦分戊丁象限為三分從戊坎半分戊艮一分半戊坤二分半各作小半徑於徑端作餘弦復引長直截橢圓界各作抵周線亦成戊坎離心與亥艮巽心與乾坤震心三同勾之兩勾股形此三小半徑所成勾股形與三平圓通弦所成勾股形同式義與前圖同而

癸卯與辛卯壬寅與辰寅甲丑與子丑以及戌離與坎離亥巽與艮巽乾震與坤震其比例皆與大小半徑同平圓通弦所成勾股與小半徑所成勾股旣同式則橢圓通弦所成勾股與抵周線所成勾股亦莫不同式矣依前條小弦求大弦不用本率而用借率則求癸乙者可用坎心小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率以乘一分弧戌坎之倍倍外矢小半徑除之得借三率之四倍爲定三率求壬癸者可用艮心小半徑爲借一率以泛三率乘三分弧戌艮之倍倍外矢小半徑除之爲定三率求甲壬

者可用坤心小半徑爲一率以泛三率乘五分弧戊坤之倍倍外矢小半徑除之爲定三率矣以上二圖止析爲三分以起例雖析至多分其用亦同

求一分通弦用定三率而逐分橢弦不齊即所用定三率亦不齊若以平圓通弦和求橢圓通弦和則定三率極繁不便於用當分析之以究其不齊之故然後可齊不齊以致其齊蓋定三率者固卽泛三率乘奇分倍外矢半徑除之之數也是定三率乘之卽如以泛三率乘之又倍外矢乘之半徑除之矣若不用定三率而用泛三率則必加一倍外矢之乘半徑之

除今試就求一分通弦並求通弦和本數歸本數不論正負分別推演如下

求一分通弦者通弦爲第一數泛三率乘通弦半徑除之二除之又半外矢乘之用倍外矢則多一四除今用半外矢者省四除也半徑除之爲第二數泛三率自乘乘通弦半徑冪除之二除之一乘之四除之又半外矢冪乘之半徑冪除之爲第三數泛三率再乘乘通弦半徑立冪除之二除之一乘之四除之三乘之六除之又半外矢立冪乘之半徑立冪除之爲第四數此求一分通弦各歸本數法也若求逐分通弦和則當以通弦和爲

第一數泛三率乘通弦和半徑除之二除之又十象限弧分分數除逐分所用半外矢之和乘之半徑除之爲第二數泛三率自乘乘通弦和半徑冪除之二除之一乘之四除之又弧分除各半外矢冪和乘之半徑冪除之爲第三數泛三率再乘乘通弦和半徑立冪除之二除之一乘之四除之三乘之六除之又弧分除各半外矢立冪和乘之半徑立冪除之爲第四數如是各歸本數此求通弦和法也但求一分通弦後一數可就前一數加乘加除而得而求通弦和則不能就前一數加乘加除而得何也逐分半外矢

和與逐分半外矢平冪和及立冪和等數不相通非可加乘而得當細核其弧分除各半外矢和與半徑之比例若何及弧分除各半外矢冪和與半徑冪之比例若何並弧分除各半外矢立冪和及諸乘冪和與半徑立冪及諸乘冪之比例若何若得其比例數則即用比例數一乘一除可代末後半外矢及半徑之乘除矣茲分條細核如後

凡第二數用半外矢今就象限爲一分弧而論析圓周爲四分則象限爲一分弧則所用爲九十度正矢即半徑半之得半外矢爲二分半徑之一析象限爲二分則中前

一分近大徑端者為中前近小徑端者為中後用一百三十五度大矢即半徑多一四十五度正弦今以正弦如其數半徑如天元仿天元算式演之得式如下‖中後一分用四十五度正矢即半徑少一四十五度正弦丅｜相併得二半徑○‖正弦正負相抵適盡

弧分二除之又半之仍得二分半徑之一　析象限為三分則居中一分用九十度正矢即半徑○｜中前一分用一百五十度大矢即半徑多一六十度正弦‖中後一分用三十度正矢即半徑少一六十度正弦丅｜併中前後一分矢○‖又併中一分矢得三半徑○‖弧分三除之又半之仍得二分之一

析彖限爲四分則中前一分用一百十二度半大矢卽半徑多一二十二度半正弦甲丨甲丨四分弦用兩種正弦故以別之甲乙中後一分用六十七度半正矢卽半徑少一二十二度半正弦甲卜丨中前二分用一百五十七度半大矢卽半徑多一六十七度半正弦乙丨乙丨中後二分用二十二度半正矢卽半徑少一六十七度半正弦乙卜丨併中前後一分矢〇〓又併中前後二分矢〇〓兩數相併得四半徑〇〣弧分四除之又半之仍得二分之一　大率弧分不論奇耦其中前後同分之用矢相併常得二半徑而奇分弧之中一分用矢

常得一半徑故弧分若干分則併用矢亦得若干半徑以弧分除之又半之必得二分半徑之一是第二數以一乘之二除之可代弧分除半外矢之乘半徑之除也

第三數用半外矢冪試析象限為二分則中前一分用矢為半徑多四十五度正弦丨丨自乘得丨‖丨（一段正弦冪多二段半徑乘正弦多一段半徑冪下可類推）中後一分為半徑少四十五度正弦卜丨自乘得丨卜丨相併得兩段四十五度正弦冪兩段半徑冪‖○‖而兩段正弦冪即一段半徑冪（半徑為方斜四十五度正弦為方邊）是三段半徑冪也

弧分二除之又全半平方比例四除之半矢冪得全矢冪四分之一得八分半徑冪之三　析象限爲三分則中一分用矢卽半徑○丨自乘得○○丨中前一分用矢爲半徑多六十度正弦丨丨中後一分用矢爲半徑少六十度正弦卜丨各自乘相併‖○‖又併中一分矢冪得兩段六十度正弦冪多三段半徑冪‖○|||而兩段正弦冪卽一段五分半徑冪六十度正弦自乘半徑冪除之得七五倍之得一五故知兩段正弦冪卽一段五分半徑冪是四段五分半徑冪也弧分三除之又全半比例四除之得十二分之四五以一五約之仍得八分之三　析象限爲四分則

中前一分用矢爲半徑多二十二度半正弦甲丨丨中後一分爲半徑少二十二度半正弦甲卜丨各自乘相併得甲‖〇‖中前二分用矢爲半徑多六十七度半正弦乙丨丨中後二分爲半徑少六十七度半正弦乙卜丨各自乘相併得乙‖〇‖兩數相併得兩段二十二度半正弦冪兩段六十七度半正弦冪多四段半徑冪甲‖乙‖〇‖‖而四段正弦冪相併即兩段半徑冪六十七度半正弦即二十二度半餘弦是共得六段半徑冪也弧分四除之又全半比例四除之得十六分之六以二約之仍得八分之三　析象限爲五分則中一分用矢即

半徑〇〡自乘得〇〇〡中前一分用矢爲半徑多三十六度正弦〡甲〡中後一分爲半徑少三十六度正弦卜甲〡各自乘相併得〢甲〇〢中前二分用矢爲半徑多七十二度正弦〡乙〡中後二分爲半徑少七十二度正弦卜乙〡各自乘相併得〢乙〇〢併各矢冪得兩段三十六度正弦冪兩段七十二度正弦冪多五段半徑冪〢乙〡甲〇〡〡〡〡而四段正弦相併即二段五分半徑冪以七十二度正弦自乘半徑冪除之又三十六度正弦自乘半徑冪除之相併得一二五倍之得二五故知爲二段五分半徑冪是共得七段五分半徑冪也弧分五除之又全半比例四除之得二十分之七五以

二五約之仍得八分之三　大率遞加一分弧則遞加一段五分半徑冪其分母則遞加四而四分之一五卽八分之三故逐分遞加常得八分半徑冪之三就本數而論則三乘八除可代倍矢冪及半徑冪之乘除若就前一數加乘加除求本數則前數已含一乘二除是加三乘四除一與三遞乘二與四遞除卽三乘八除可代本數弧分除倍外矢冪之乘半徑冪之除也惟就象限爲一分弧則用矢冪爲八分半徑冪之二尚有加減差另條詳論於後

第四數用半外矢立冪析象限爲二分則中前一分

用矢爲半徑多四十五度正弦｜｜再乘得｜||| |||

｜一段正弦立冪多三段正弦平冪乘半徑三段正弦乘半徑平冪一段半徑立冪下可類推中

後一分爲半徑少四十五度正弦卜｜再乘得卜|||

卌｜相併得六段正弦平冪乘半徑兩段半徑立冪

〇丅〇||而六段正弦平冪乘半徑即三段半徑立

冪以正弦冪即半徑冪之半也是共得五段半徑立冪也弧分二

除之又全半立冪比例八除之半矢立冪得全矢立冪八分之一得

十六分半徑立冪之五　析象限爲三分則中一分

用矢即半徑〇｜再乘得〇〇〇｜中前一分用矢

爲半徑多六十度正弦｜｜｜中後一分爲半徑少六

十度正弦卜丨各再乘相併得〇丅〇〢又併中一
分矢立冪得六段正弦平冪乘半徑多三段半徑立
冪〇丅〇〣而六段正弦平冪乘半徑卽四段五分
半徑立冪（六十度正弦冪卽七分五釐半徑冪以六乘之得四五故知爲四段五分半徑立冪）
是共得七段五分半徑立冪也弧分三除之又全半
比例八除之得二十四分之七五以一五約之仍得
十六分之五　析彖限爲四分則中前一分用矢爲
半徑多二十二度半正弦丨甲丨中後一分爲半徑少
二十二度半正弦卜甲丨各再乘相併得〇丅甲〇〢中
前二分用矢爲半徑多六十七度半正弦丨乙丨中後

二分爲半徑少六十七度半正弦卜乙丨各再乘相併得〇丅乙〇‖併各矢立冪得六段二十二度半正弦冪乘半徑六段六十七度半正弦冪乘半徑多四段半徑立冪〇乙甲〇Ⅲ而合兩六段正弦平冪乘半徑即六段半徑立冪以兩正弦冪相併即半徑冪也是共得十段半徑立冪也弧分四除之又全半比例八除之得三十二分之十以二約之仍得十六分之五　析象限爲五分則中一分用矢即半徑〇丨再乘得〇〇〇丨中前一分用矢爲半徑多三十六度正弦丨甲丨中後一分爲半徑少三十六度正弦卜甲丨各再乘相併得〇

丅甲〇〢中前二分用矢爲半徑多七十二度正弦〡乙〡中後二分爲半徑少七十二度正弦卜乙〡各再乘相併得〇丅乙〇〢併各矢立冪得六段三十六度正弦平冪乘半徑六段七十二度正弦平冪乘半徑多五段半徑立冪〇乙甲〇〣而兩六段正弦平冪乘半徑即七段五分半徑立冪（兩正弦冪併率爲一二五以六乘之得七段五分）是共得十二段五分半徑立冪也弧分五除之又全半比例八除之得四十分之十二五以二五約之仍得十六分之五大率遞加一分弧則遞加二段五分半徑立冪其分母則遞加八而八分之二五即十

六分之五故逐分遞加常得十六分半徑立冪之五是就本數而論則五乘十六除可代用矢立冪及半徑立冪之乘除就前一數加乘加除求本數則前數已含三乘八除是五乘十六除三與五遞乘六與八遞除卽五乘十六除可代弧分除半外矢立冪之乘半徑立冪之除也惟一分弧用矢立冪爲十六分之二當有加減差

第五數用倍外矢三乘冪析弧分爲三分則中一分用矢卽半徑〇丨三自乘得〇〇〇丨中前一分用矢爲半徑多六十度正弦丨丨三自乘得丨〤丅〤丨中後一分卽半徑少六十度正弦卜丨三自乘

得丨卌丅卌丨併中前後一分矢冪‖〇╢〇‖又併中一分矢三乘冪得二段六十度正弦三乘冪多十二段正弦平冪乘半徑平冪多三段半徑三乘冪‖〇╢〇〣而十二段正弦冪乘半徑冪即九段半徑三乘冪置七分五釐以十二乘之得九故知九段半徑三乘冪二段正弦三乘冪即一段一分二釐五毫半徑三乘冪七分五釐自乘得五分六釐二毫五絲倍之得一段一分二釐五毫是共得十三段一分二釐五毫半徑三乘冪也弧分三除之全半三乘比例十六除之半矢三乘冪得全矢三乘冪十六分之一得四十八分之十三一二五以八通之三約之得一百二十八分半徑三乘冪

之三十五　析象限為四分則中前一分用矢為半徑多二十二度半正弦丨甲丨中後一分為半徑少二十二度半正弦卜甲丨各三自乘相併得〢甲〇-〢甲〇〢中前二分用矢為半徑多六十七度半正弦丨乙丨中後二分為半徑少六十七度半正弦卜乙丨各三自乘相併得〢乙〇-〢乙〇〢併各矢三乘冪得二段二十二度半正弦三乘冪二段六十七度半正弦三乘冪多十二段二十二度半正弦平冪乘半徑平冪十二段六十七度半正弦平冪乘半徑平冪多四段半徑三乘冪〢乙〢甲〇-〢乙-〢甲〇〣而十二段半徑冪乘兩種正弦冪

之共卽十二段半徑三乘冪〔兩種正弦冪相併卽半徑冪〕二段兩種正弦三乘冪之共卽一段五分半徑三乘冪〔二十二度半正弦三自乘六十七度半正弦三自乘相併以半徑三乘冪除之得七五倍之得一五故知爲一段五分半徑三乘冪〕是共得十七段五分半徑三乘冪也弧分四除之又全半比例十六除之得六十四分之十七〔五〕以二通之仍得一百二十八分之三十五　析象限爲五分則中一分用矢卽半徑〇〡三自乘得〇〇〇〇〡中前一分用矢爲半徑多三十六度正弦〡甲〡中後一分爲半徑少三十六度正弦⊥甲丅各三自乘相併得〢甲〇-〢甲〇〢中前二分用矢爲半徑多七

十二度正弦〡乙〡中後二分爲半徑少七十二度正弦忆〡各三自乘相併得〢乙〇一忆〇〢併各矢三乘冪得二段三十六度正弦三乘冪二段七十二度正弦三乘冪多十二段三十六度正弦平冪乘半徑平冪十二段七十二度正弦平冪乘半徑平冪五段半徑三乘冪忆卌〇一忆卌〇〤而十二段半徑冪乘兩種正弦冪之共即十五段半徑三乘冪兩正弦冪相併爲一段二分五釐半徑冪以十二乘之得十五故知十五段半徑三乘冪二段兩種正弦三乘冪爲一段八分七釐五毫半徑三乘冪三十六度正弦與七十二度正弦各三自乘相併半徑三乘冪除之得九三七五倍之得一八七五故知爲一段八分七釐五毫半徑三乘冪

是共得二十一段八分七釐五毫半徑三乘冪也弧分五除之又全半比例十六除之得八十分之二十一八七五以一六通之仍得一百二十八分之三十五　析象限爲六分則中前一分用矢爲半徑多十五度正弦〡甲〡中後一分爲半徑少十五度正弦卜甲〡各三自乘相併得〢甲〇⊣〢甲〇〢中前二分用矢爲半徑多四十五度正弦〢乙〡中後二分爲半徑少四十五度正弦卜乙〡各三自乘相併得〢乙〇⊣〢乙〇〢中前三分用矢爲半徑多七十五度正弦〡丙〡中後三分爲半徑少七十五度正弦卜丙〡各三自乘相併得

〢丙〇一〢丙〇〢併各矢三乘冪得二段十五度正弦三乘冪二段四十五度正弦三乘冪二段七十五度正弦三乘冪多十二段十五度正弦平冪乘半徑平冪十二段四十五度正弦平冪乘半徑平冪十二段七十五度正弦平冪乘半徑平冪多六段半徑三乘冪〢丙乙甲〇一〢丙乙甲〇丁而十二段四十五度正弦冪乘半徑冪卽六段半徑三乘冪四十五度正弦冪得半徑冪之半其十二段十五度與七十五度兩種正弦冪乘半徑冪之共卽十二段半徑三乘冪七十五度正弦卽十五度餘弦合正餘弦冪卽半徑冪其二段四十五度正弦三乘冪卽五分半徑三乘冪平冪得半

徑平冪之半則三乘冪必得半徑三乘冪四分之一倍之得二分之一即五分其二段十五度與七十五度兩種正弦三乘冪之共即一段七分五釐半徑三乘冪十五度正弦與七十五度正弦各三自乘相併半徑三乘冪除之得八七五倍之得一七五故知爲一段七分五釐半徑三乘冪是共得二十六段二分五釐半徑三乘冪也弧分六除之又全半比例十六除之得九十六分之二十六二五以四通之三約之仍得一百二十八分之三十五大率遞加一分弧則遞加四段三分七釐五毫半徑三乘冪而分母則遞加十六十六分之四三七五即一百二十八分之三十五故逐分遞加常得一百二十八分半徑三

乘冪之三十五是就本數而論則三十五乘一百二十八除可代用矢三乘冪與半徑三乘冪之乘除就前一數加乘加除求本數則前數已含五乘十六除是加七乘八除（五與七疊乘又十六與八疊除即三十五乘一百二十八除）可代弧分除半外矢三乘冪之乘半徑三乘冪之除也惟一分弧用矢三乘冪爲一百二十八分之八二分弧爲一百二十八分之三十四當有加減差　由是依法推演則第六數自二分弧以上其弧分除各半外矢四乘冪之和常得二百五十六分半徑四乘冪之六十三就前數求本數則前數已含三十五乘一百

二十八除其求本數祇須加九乘十除〔三十五與九疊乘一百二十八與十疊除卽六十三乘二百五十六除〕第七數自三分弧以上其弧分除各半外矢五乘冪之和常得一千○二十四分半徑五乘冪之二百三十一就前一數求本數則前數已含六十三乘二百五十六除故求本數祇須用十一乘十二除〔六十三與十一疊乘二百五十六與十二疊除卽二百三十一乘一千○二十四除〕總而計之就第一數一乘二除爲第二數再加三乘四除爲第三數再加五乘六除爲第四數再加七乘八除爲第五數再加九乘十除爲第六數再加十一乘十二除爲第七數皆以相連之奇耦二數一

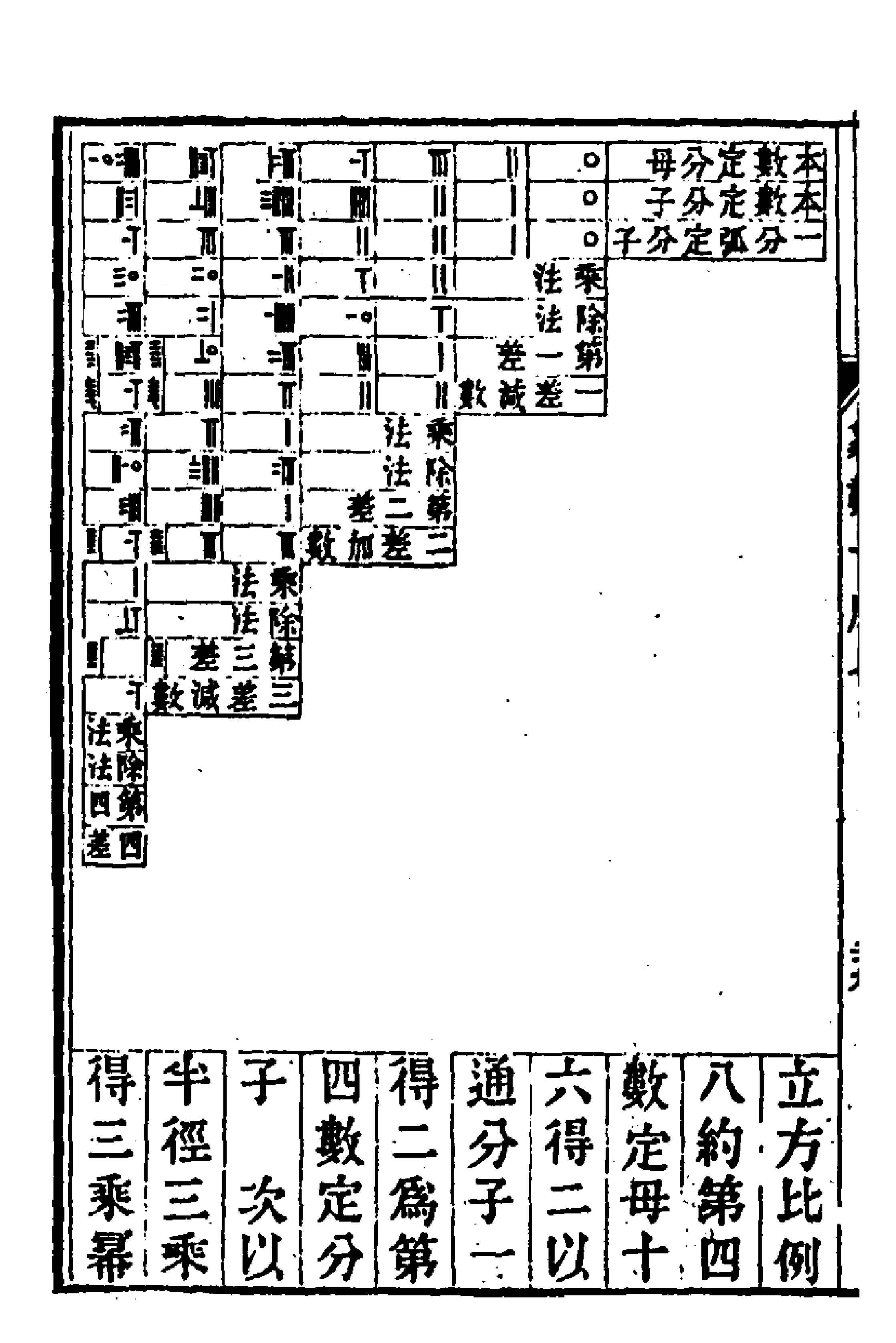
乘一除蟬聯而下秩然不紊則自第八數以下其遞推之例已顯於前亦必用奇耦二數一乘一除無疑矣然此所求者但可爲本數也此云本數所以別於加減差即術中先求者與前此之所云本數有別益一分弧則第三數以下分數不合二分弧則第五數以下不合三分弧則第七數以下不合又當求其加減差之由來矣

欲知加減差之所由來當于半外矢與半徑之比例先求本數之逐數母子然後以一分二分三四分等弧就本數分母各求其逐數分子與本數分子兩相比較於比較而同者知各差之起於何數於此比較而

異者知求各差之數不外乎整分遞加數又以逐分弧分子與本數分子之同異互相比較而益知用遞加數自有一定之例而不紊推演如下

求本數母子者起第二數二分之一三乘四除得八分之三（乘法乘子除法以乘其母爲除）爲第三數母子五乘六除可用三約得十六分之五爲第四數母子七乘八除得一百二十八分之三十五爲第五數母子九乘十除可用五約得二百五十六分之六十三爲第六數母子十一乘十二除可用三約得一千○二十四分之二百三十一爲第七數母子如是遞求得逐數母子

可約者約之使小大要分子爲奇數疊乘分母爲耦數疊乘但耦數必含奇數母子同含奇數故可約惟二四八十六等數其所含之奇數爲單一故不可約既得本數母子乃以本數分母爲定母先求一分弧分子一分弧所用外矢卽半徑則第二數分子爲一半之得二分之一分母與定母同卽以一爲第二數定分子　次以半徑自乘得平冪一則第三數分子爲一以分母全半平方比例四約第三數定母八得二以通分子一得二爲第三數定分子　次以半徑再乘得立冪一則第四數分子亦爲一以分母全半



立方比例八約第四數定母十六得二以通分子一得二爲第四數定分子　次以半徑三乘得三乘冪

加差數	乘法 除法	第五差	減差數
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

一則第五數分子亦爲一以分母全半三乘比例約定母一百二十八得八以通分子一得八爲第五數定分子如是遞求得一分弧逐數定分子

如圖列本數定分母爲第一層本數定分子爲第二層一分弧定分子爲第三層以分子兩相比較惟第二數分子同爲一無加減差第三數本數分子三一分弧分子二應減分子一而應減數與本數分子

之比例若一與三第四數本數分子五一分弧分子
二應減分子三而應減數與本數分子之比例若三
與五因檢遞加數第三行其倍首位一得二與三位
六之比例亦若一與三其倍次位三得六與四位十
之比例亦若三與五試以遞加數第三行自倍首位
數起取第三數以下本數分子挨位挨次乘之又自
三位數起挨次除之爲第一差其第三數乘除得一
以減本數分子三得二與定分子合第四數乘除得
三以減本數分子五得二亦與定分子合第五數乘
除得二十八以減本數分子得一差減數七以較定

分子八尚應加一是第五數以下當有第二差也而應加數與第一差之比例若一與二十八第六數乘除得六十以減本數分子得一差減數三以較定分子八尚應加五而應加數與第一差之比例若五與六十因檢遞加數第七行其首位與三位亦爲一與二十八次位七與四位八十四之比例亦若五與六十試以遞加數第七行自首位起取第五數第一差以下按位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第二差第五數乘除得一加一差減數七得八與定分子合第六數乘除得五以加一差減數三得八亦與定

分子合第七數乘除得三十三以加一差減數十六
五負得二差加數十六五正以較定分子尚應減五
是第七數以下當有第三差也而應減數與第二差
之比例若五與三十三第八數乘除得九十一以加
一差減數七十一五負得二差加數十九五正以較
定分子十六尚應減三五而應減數與第二差之比
例若三五與九十一因檢遞加數第十一行其首位
一與三位六十六之比例亦若五與三十三次位十
一與四位二百八十六之比例亦若三五與九十一
試以遞加數第十一行自首位起取第七數以下第

二差按位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第三差第七數乘除得五以減二差加數十六五得十六與定分子合第八數乘除得三五以減二差加數十九五得十六亦與定分子合第九數乘除得一百二十以減二差加數二百四十七得三差減數一百二十七以較定分子一百二十八尙應加一是第九數以下當有第四差也而應加數與第三差之比例若一與一百二十第十數乘除得四百〇八以減二差加數五百二十七得三差減數一百十九以較定分子一百二十八尙應加九而應加加數與第三差之比

例若九與四百〇八因檢遞加數第十五行其首位與三位亦爲一與一百二十次位十五與四位六百八十之比例亦若九與四百〇八試以遞加數第十五行自首位起取第九數以下第三差挨位挨次乘之又自三位起挨次除之爲第四差其第九數乘除得一以加三差減數一百二十七得一百二十八與定分子合第十數乘除得九以加三差減數一百十九得一百二十八亦與定分子合第十一數乘除得九十五以加三差減數一百六十一五得四差加數二百五十六五以較定分子二百五十六尚應減五

是第十一數以下當有第五差也而應減數與第四差之比例若五與九十五因檢遞加數第十九行其首位一與三位一百九十之比例亦若五與九十五試以遞加數十九行首位與三位乘除第十一數第四差爲第五差得五以減四差加數得二百五十六與定分子合統而計之第一差起第三數第二差起第五數第三差起第七數第四差起第九數第五差起第十一數夫各差皆起各奇數者乃二因弧分加一四因弧分加一六因弧分加一八因弧分加一十因弧分加一之數也如是遞以耦數乘弧分加一得

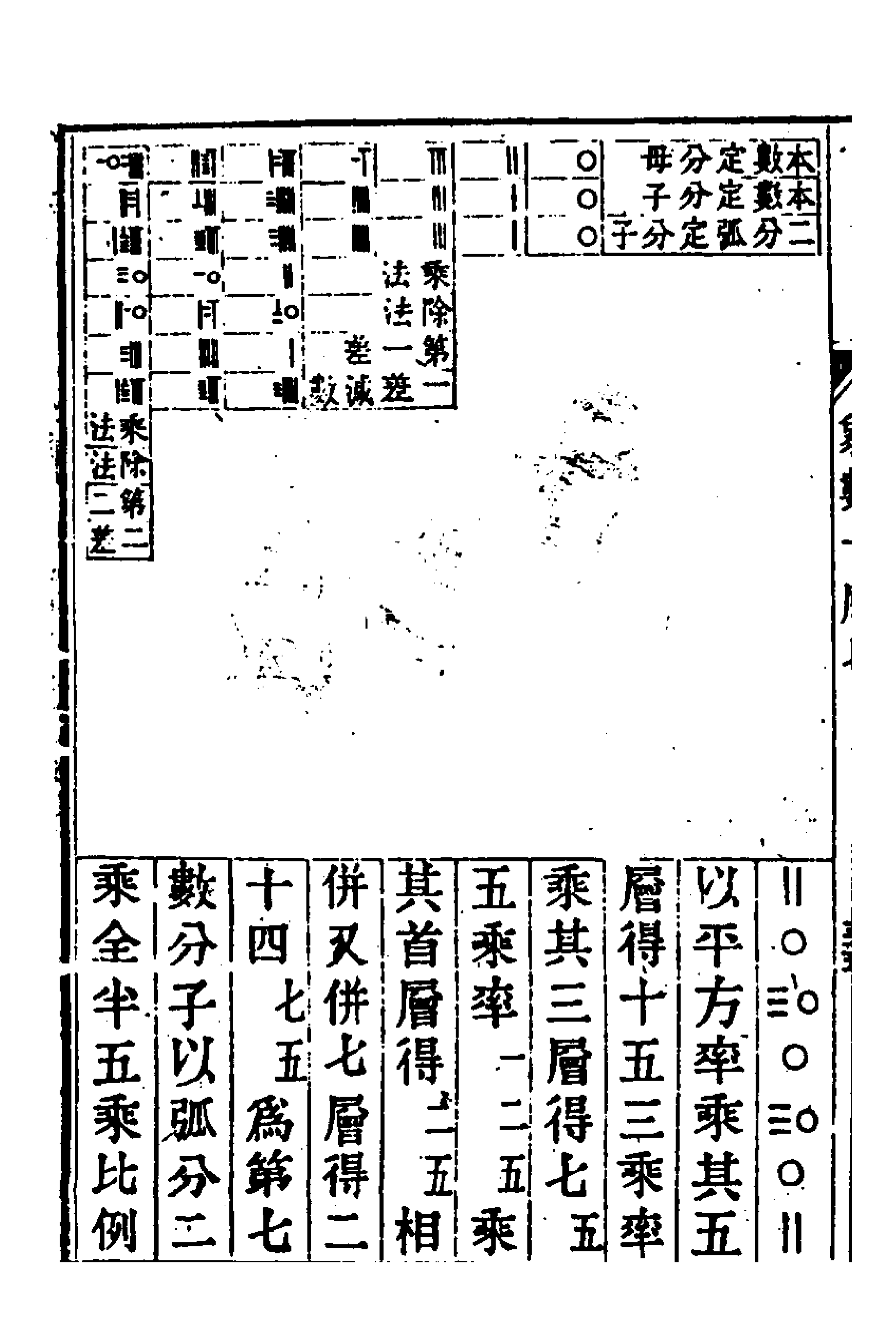
各差之所起則第六差起十二因弧分加一之第十三數第七差起十四因弧分加一之第十五數可類推矣第一差遞加行數用第三而各差除法位數皆起第三者乃倍弧分加一之數也第二差遞加行數用第七三差用第十一四差用第十五五差用第十九者乃三因倍分加一五因倍分加一七因倍分加一九因倍分加一之數也如是遞以各奇數乘倍分加一得各差所用遞加行數則第六差用十一因倍分加一之第二十三行第七差用十三因倍分加一之第二十七行又可類推矣細審一分弧遞求加減

差之例秩然不紊特未知與逐分弧恐合否也試更驗之二分弧

求二分弧定分子者二分弧用矢一為半徑多四十五度正弦一為半徑少四十五度正弦當先求正弦諸乘方與半徑諸乘方比例之率法以四十五度正弦自乘半徑冪除之得五為平方率正弦三自乘半徑三乘冪除之得二五為三乘率正弦五自乘半徑五乘冪除之得一二五為五乘率正弦七自乘半徑七乘冪除之得○六二五為七乘率如是遞求得九乘率○三一二五十一乘率○一五六二五十三乘

率〇〇七八一二五十五乘率〇〇三九〇六二五
於是以兩用矢相併得〇‖即以二爲第二數分子
以弧分二乘全半根數比例二得四爲分母以第二
數定母二約之得二以除分子二得一爲定分子
兩用矢冪相併得‖〇‖以平方率五乘其首層得
一併三層二得三爲第三數分子以弧分二乘全半
平方比例四得八與定母同卽以三爲定分子兩
用矢立冪相併得〇丅〇‖以平方率乘其二層得
三併四層二得五爲第四數分子以弧分二乘全半
立方比例八得十六與定母同卽以五爲定分子

兩用矢三乘冪相併得||〇一||〇||以平方率乘其三層得六以三乘率二五乘其首層得五相併又併五層得八五爲第五數分子以弧分二乘全半三乘比例十六得三十二以約定母一百二十八得四以通分子八五得三十四爲定分子　兩用矢四乘冪相併得〇一〇〇二〇〇||以平方率乘其四層得十以三乘率乘其二層得二五相併又併六層得十四五爲第六數分子以弧分二乘全半四乘比例三十二得六十四以約定母二百五十六得四以通分子十四五得五十八爲定分子　兩用矢五乘冪相併得



本數定分母
本數定分子
二分弧定分子

乘除第一
法法一
差減數

乘除第二
法法二差

以平方率乘其五
層得十五三乘率
乘其三層得七五
五乘率一二五乘
其首層得二二五相
併又併七層得二
十四七五爲第七
數分子以弧分二
乘全半五乘比例

差	
加數	

乘法	
除法	
第三差	
三差減數	

乘法	
除法	
第四差	
四差加數	

六十四得一百二十八以約定母一千〇二十四得八以通分子二十四七五得一百九十八爲定分子如是遞求得二分弧逐數定分子　如圖

列本數定分母爲第一層本數定分

[illegible]

子為第二層二分

弧定分子為第三

層兩相比較其第二第三第四數兩定分子相同無

加減差第五數二分弧分子三十四本數分子三十

五應減一是二分弧第一差起第五數也而應減數

與本數分子之比例若一與三十五第六數定分子

五十八本數分子六十三應減五而應減數與本數

分子之比例若五與六十三因檢遞加數第五行其

倍首位一得二與五位七十之比例亦若一與三十

五倍次位五得十與六位一百二十六之比例亦若

五與六十三三試以遞加數第五行自倍首位起取第五數以下本數分子按位挨次乘之又自五位起挨次除之爲第一差第五數乘除得一以減本數分子三十五得三十四第六數乘除得五以減本數分子六十三得五十八第七數乘除得三十三以減本數分子二百三十一得一百九十八第八數乘除得九十一以減本數分子四百二十九得三百三十八均與各數定分子合第九數乘除得一千八百二十以減本數分子六千四百三十五得一差減數四千六百十五以較定分子應加一是二分弧第二差起第

九數也而應加數與第二差之比例若二與一千八百二十第十數乘除得四千二百八十四以減本數分子一萬二千一百五十五得一差減數七千八百七十一以較定分子應加九而應加數與第一差之比例若九與四千二百八十四因檢遞加數第十三行其首位與五位亦爲二與一千八百二十其次位十三與六位六千一百八十八之比例亦若九與四千二百八十四試以第十三行自首位起取第九數以下第一差挨位挨次乘之又自五位起挨次除之爲第二差第九數乘除得一以加一差減餘數四千

六百十五得四千六百十六第十數乘除得九以加一差減數七千八百七十一得七千八百八十一數乘除得九十五加一差減數二萬六千八百〇九得二萬六千九百〇四十二數乘除得三百八十五加一差減數四萬五千五百四十三得四萬五千九百二十八均與各數定分子合十三數乘除得五千三百十三加一差減數得二差加數三十一萬三千六百十六 五 以較定分子尚應減 五 是二分弧第三差起第十三數也而應減數與第二差之比例若 五 與五千三百十三三十四數乘除得一萬六千四百四

十五加一差減數得二差加數五十三萬五千三百八十二五以較定分子尙應減六五而應減數與第二差之比例若六五與一萬六千四百四十五因檢遞加數第二十一行其首位一與五位一萬〇六百二十六之比例亦若五與五千三百十三次位二十一與六位五萬三千一百三十之比例亦若六五與一萬六千四百四十五試以二十一行自首位起取第十三數以下第二差按位挨次乘之又五位起挨次除之爲第三差第十三數乘除得五以減二差加數得三十一萬三千六百十六第十四數乘除得六

五以減二差加數得五十三萬五千三百七十六第十五數乘除得九十四五減二差加數得一百八十二萬七千八百八十八第十六數乘除得五百○七五減二差加數得三百十二萬○四百均與各數定分子合十七數乘除得三萬五千九百六十減二差加數得三差減數八千五百二十二萬九千六百九十五以較定分子應加一是二分弧第四差起第十七數也而應加數與第三差之比例若一與三萬五千九百六十因檢遞加數第二十九行首位與五位亦爲一與三萬五千九百六十試以二十九行首位

與五位乘除第十七數第三差爲第四差得一以加
三差減數得八千五百二十二萬九千六百九十六
與定分子合統計第一差起第五數二差起第九數
三差起第十三數四差起第十七數亦以二因弧分
加一起一差四因弧分加一起二差六因弧分加一
起三差八因弧分加一起四差與一分弧同第一差
用遞加數第五行各行除法皆起第五位亦以倍弧
分加一爲行數及除法位數第二差用十三行第三
差用二十一行第四差用二十九行亦以三因倍分
加一五因倍分加一七因倍分加一爲行數均與一

分弧同是二分弧遞求加減差之例一一與二分弧
脗合矣試更驗之三分弧及四分弧
求三分弧定分子者三分弧用矢一爲半徑一爲半
徑多六十度正弦一爲半徑少六十度正弦先求正
弦諸乘方與半徑諸乘方比例之率法以六十度正
弦自乘半徑冪除之得七五爲平方率正弦三自乘
半徑三乘冪除之得五六二五爲三乘率正弦五自
乘半徑五乘冪除之得四二一八七五爲五乘率如
是遞求得七乘率三一六四〇六二五九乘率二三
七三〇四六八七五十一乘率一七七九七八五一

五六二三五十三乘率一一三三四八三八八六六七一八

七五十五乘率一〇〇一一二九一五〇三九〇六

二五十七乘率〇七五〇八四六八六二七九二九

六八七五於是以三用矢相併得〇|||爲三半徑卽以弧分三除半徑三得一爲第二數分子奇分弧弧分除定母多不受除故以除分子求法與耦分弧有別下同全半根數比例與定母同卽以一爲定分子　三用矢冪相併得||〇|||以平方冪七五乘其首層得一五倂三層得四五弧分除之得一五爲第三數分子以全半平方比例四約定母八得二以通分子一五得三爲定分子　三用矢

立冪相併得〇T〇‖‖‖以平方率乘其次層得四五

併四層得七五弧分除之得二五爲分子以全半立

方比例約定母十六得二以通分子二五得五爲定

分子　三用矢三乘冪相併得‖〇一‖〇‖‖‖以平方

率乘其三層得九以三乘率五六二五乘其首層得

一一二五相併又併五層得十三一二五弧分除之

得四三七五爲分子以全半三乘比例十六約定母

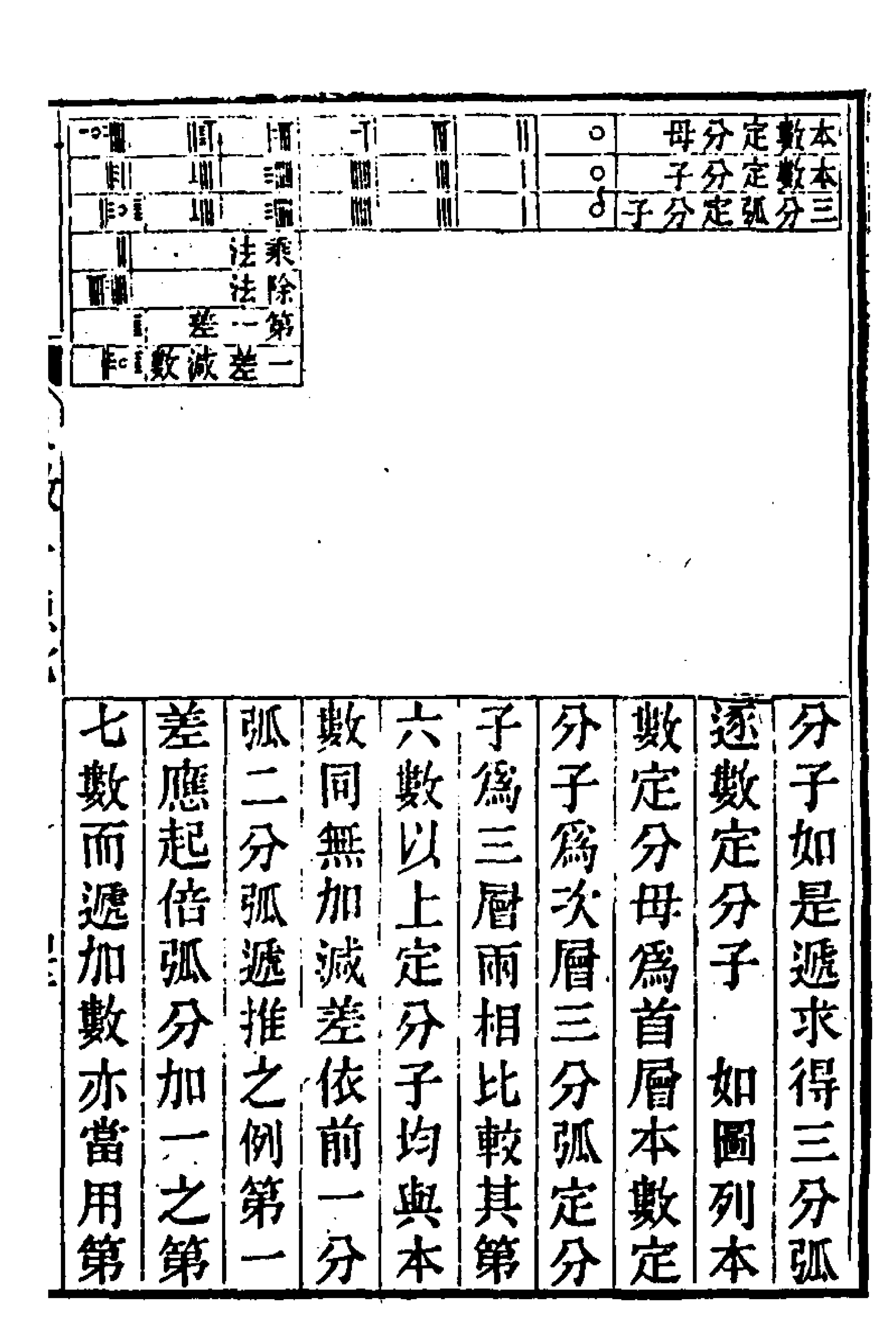
一百二十八得八以通分子四三七五得三十五爲

定分子　三用矢四乘冪相併得〇一〇〇二〇〇‖‖‖以

平方率乘其四層得十五以三乘率乘其次層得五

六二二五相併又併六層得二十三六二二五弧分除之得七八七五為分子以全半四乘比例三十二約定母二百五十六得八以通分子七八七五得六十三為定分子

三用矢五乘冪相併得〢〇≡〇〇≡〇〇〣以平方率乘其五層得二十二五以三乘率乘其三層得十六八七五以五乘率四二一八七五乘其首層得八四三七五相併又併七層得四十三二一八七五弧分除之得十四四〇六二五為分子以全半五乘比例六十四約定母一千〇二十四得十六以通分子十四四〇六二五得二百三十〇五為定



分子如是遞求得三分弧逐數定分子　如圖列本數定分母為首層本數定分子為次層三分弧定分子為三層兩相比較其第六數以上定分子均與本數同無加減差依前一分弧二分弧遞推之例第一差應起倍弧分加一之第七數而遞加數亦當用第

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

乘法	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
除法	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
第二差	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
二差加數	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

七行除法亦起第七位今第七數本數分子應減五方合定分子而應減數與本數分子之比例若五與二百三十一正與第七行倍首位一得二與七位九百二十四之比例相合乃以第七行自倍首位起取第七數以下本數分子挨位挨次乘之又自七位起

乘法

除法

第三差

三差減數

挨次除之爲第一差第七數乘除得五以減本數分子得二百三十〇五第八數乘除得三五減本數分子得四百二十五五第九數乘除得一百二十減本數分子得六千三百十五第十數乘除得四百〇八減本數分子得一萬一千七百四十七第十一數乘除得二千四百二十二五減本數分子得四萬三千七百六十六五第十二數乘除得六千五百八十三

五減本數分子得八萬一千五百九十五五以上均
與各數定分子合依前遞推之例第二差應起四因
弧分加一之第十三數遞加數應用三因倍分加一
之第十九行而除法仍起第七位今第十三數之一
差減數六十萬八千七百四十一以較定分子應加
五而應加數與第一差之比例若五與六萬七千二
百九十八正與遞加數十九行首位一與七位十三
萬四千五百九十六之比例相合乃以十九行自首
位起取十三數以下第一差按位挨次乘之又自七
位起挨次除之為第二差第十三數乘除得五加一

差減數得六十萬〇八千七百四十一五第十四數
乘除得六五加一差減數得一百十三萬五千六百
三十一五十五數乘除得九十四五加一差減數得
四百二十三萬七千六百四十三二五十六數乘除
得五百〇七五加一差減數得七百九十萬〇六千
九百五十八七五十七數乘除得三萬五千九百六
十加一差減數得二億三千六百〇六萬三千九百
十五十八數乘除得十三萬九千一百二十八加一
差減數得四億四千〇四十九萬一千八百〇三以
上均與各數定分子合依遞求之例第三差應起六

因弧分加一之第十九數遞加數當用五因倍分加一之三十一行除法仍起第七位今第十九數之二差加數爲十六億四千三百九十一萬八千八百七十一以較定分子應減五而應減數與第二差之比例若五與九十七萬三千八百九十六正與遞加數三十一行首位一與七位一百九十四萬七千七百九十二之比例相合乃以三十一行首位與七位乘除十九數第二差爲第三差得五以減二差加數得十六億四千三百九十一萬八千八百七十〇五與定分子合通計求三分弧加減差其起差數及遞加

數所用行數皆與一分弧二分弧一例

求四分弧定分子者四分弧用矢一爲半徑多六十七度半正弦一爲半徑少六十七度半正弦一爲半徑多二十二度半正弦一爲半徑少二十二度半正弦當先求兩正弦諸乘冪併數與半徑諸乘冪比例之率法以兩正弦自乘相併半徑冪除之得一爲平方併率兩正弦三自乘相併半徑三乘冪除之得七五爲三乘併率兩正弦五自乘相併半徑五乘冪除之得六二五爲五乘併率如是遞求得七乘併率五三一二五九乘併率四五三一二五十一乘併率三

八六七一八七五十三乘併率三三〇〇七八一二五十五乘併率二八一七三八二八一二五於是以四用矢相併得〇𝍣爲四半徑卽以四爲第二數分子以弧分四乘全半根數比例二得八爲分母以定母二約之得四以除分子得一爲定分子　四用矢冪相併得𝍡㐅〥〇𝍣以平方併率一乘其首層之一邊二仍得二併三層得六爲第三數分子以弧分乘全半平方比例四得十六以定母八約之得二以除分子得三爲定分子　四用矢立冪相併得𝍥㐅〥〇𝍣以平方併率乘其次層之一邊六仍得六併四層得

十爲第四數分子以弧分乘全半立方比例八得三十二以定母十六約之得二以除分子得五爲定分子　四用矢三乘乘冪相併得[illegible]○[illegible]○||||以平方併率乘其三層之一邊十二仍得十二以三乘併率七五乘其首層之一邊二得一五相併又併五層得十七五爲第五數分子以弧分乘全半三乘比例十六得六十四以約定母一百二十八得二以通分子得三十五爲定分子　四用矢四乘冪相併得○[illegible]○[illegible]○||||以平方併率乘其四層之一邊得二十以三乘併率乘其次層之一邊得七五相併又併六層得

三十一五爲第六數分子以弧分乘全半四乘比例
三十二得一百二十八以約定母二百五十六得二
以通分子得六十三爲定分子　四用矢五乘冪相
併得[illegible]○[illegible]○[illegible]○||||以平方併率乘其五層之一
邊得三十以三乘併率乘其三層之一邊得三十二
五以五乘併率六二五乘其首層之一邊得一二五
相併又併七層得五十七七五爲第七數分子以弧
分乘全半五乘比例六十四得二百五十六以約定
母一千○二十四得四以通分子得二百三十一爲
定分子如是遞求得四分弧逐數定分子　如圖列

本數定分母	○	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
本數定分子	○	|	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
四分弧定分子	○	|	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

乘除第一
法法二差

本數定分母爲首層本數定分子爲次層四分弧定分子爲三層兩相比較其第八數以上定分子相同無加減差依遞推之例第一差應起倍分加一之第九數而遞加數亦當用第九行除法亦起第九位今第九數本數分子應減一方合定分子而應減數與本數分子之比例若一與六千四百三十五正與遞

減差數

乘法

除法

第二差

加差數

加數第九行倍首位一得二與第九位一萬二千八百七十之比例相合乃以第九行自倍首位起取第九數以下本數分子挨位挨次乘之又自九位起挨次除之爲第一差第九數乘除得一以減本數分子得六千四百三十四第十數乘除得九以減本數分子得一萬二千一百四十六十一數乘除得九十五

減本數分子得四萬六千〇九十四十二數乘除得三百八十五以減本數分子得八萬七千七百九十四十三數乘除得五千三百十三以減本數分子得六十七萬〇七百二十六十四數乘除得一萬六千四百四十五減本數分子得一百二十八萬三千六百三十十五數乘除得九萬四千一百八十五以減本數分子得四百九十二萬〇三百九十十六數乘除得二十五萬四千四百七十五以減本數分子得九百四十四萬〇三百七十以上均與各數定分子合依遞推

之例第二差應起四因弧分加一之第十七數遞加
數應用三因倍分加一之二十五行而除法仍起第
九位今十七數一差減數二億九千〇〇二萬一千
八百九十五以較定分子應加一而應加數與第一
差之比例若一與一千〇五十一萬八千三百正與
二十五行首位一與九位一千〇五十一萬八千三
百之數同乃以二十五行首位與九位乘除十七數
第一差爲第二差得一以加一差減數得二億九千
〇〇二萬一千八百九十六與定分子合通計求四
分弧加減差其起差數及遞加數所用行數亦與一

分弧二分弧三分弧一例夫自一分至四分而求加
減差之例一一相同則求至千百分當亦莫不相同
而可無疑矣此求通弦和用加減差之法所由立也
定正負加減之名則本數爲正者第一差用減爲負
數名減差第二差用加爲正數名加差以下常一負
一正相間本數爲負者第一差以減爲加反爲正數
名加差第二差以加爲減反爲負數名減差以下常
一正一負相間總之不論本數正負第一差常與本
數異名第二差常與本數同名以下各差皆與本數
一異名一同名相次而列

準是推之求通弦和皆以倍弧分加一起差數是析象限爲千分萬分必於二千〇〇一數二萬〇〇〇一數起第一差而其差亦愈後而愈微矣然猶有差數之可言也若不用通弦和而徑用平圓弧線爲第一數則旣無分數之可言卽亦無所爲差數而所得之本數卽橢圓弧線矣此又橢圓求周之術所由立也

原術用借大積開平方法專從外切平圓立義兹兼明借大積及借小積開方法率數而外切平圓亦與內容平圓兩義並舉者緣求橢圓周可用大徑平圓

周爲第一數以大徑爲一率求其減數減大平圓周而成橢圓周亦可用小徑平圓周爲第一數以小徑爲一率求其加數加小平圓周而成橢圓周求減數則與借大積開方法相通求加數則與借小積開方法相通葢二術兩相對待必得用小徑之術庶用大徑之術有所印證而益知其取數之確今依原術命題補衍於後

橢圓內容平圓勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求平圓自半分起遞加全分弧相應之橢圓逐分抵周線

法以小半徑爲第一數正取各奇分通弦各自乘小半徑除之各減四小半徑爲各倍外矢通弦自乘半徑除之爲倍正矢四半徑卽二全徑故減倍正矢得倍外矢寄左又以小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三率二除之又四除之爲第二數正次置第二數各以三率乘之一率除之得五率一乘之四除之又四除之爲第三數負次置第三數各以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之又四除之爲第四數正次置第四數各以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之又四除之爲第五數

負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負正負相減得自半分起遞加全分之橢圓各抵周線

橢圓內容平圓一象限勻析弧分爲幾取遞加奇分弧幾通弦求與平圓相應之逐分橢圓通

弦

法以一分內容平圓通弦爲第一數正取各奇分通弦各自乘小半徑除之各減四小半徑爲各倍外矢寄左又以小半徑爲一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲泛三率與左相乘一率除之爲定三

率置第一數各以三率乘之一率除之得三率二除之又四除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之得五率二乘之四除之又四除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之得七率三乘之六除之又四除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之得九率五乘之八除之又四除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下耦數正奇數負正負相減卽逐分橢圜通弦

橢圜小徑作平圜取一象限勾析爲幾分以平

圓逐分通弦和求相應之橢圓逐分通弦和

先求本數法置小徑平圓逐分通弦和爲第一數正次以小半徑爲第一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲第三率廼置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之一乘之三乘之四自乘除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數

以下耦數正奇數負

次定加減差所起之第幾數亦遞以耦數乘弧分加一爲逐次加減差所起之數與原術同原術本數皆負故第一次名加差第二次名減差今術本數正負相間各差皆有加有減故槪名爲加減差

次求逐次加減差其乘除法均與原術同其第一次加減差本數正者負之負者正之第二次加減差本數正者正之負者負之以下奇次差正負均與本數異耦次差均與本數同用表求加減差乘除法亦與原術同

末求橢圓逐分通弦和法以正數相併負數亦相併正負相減卽橢圓逐分通弦和

橢圓求周術

法以小徑爲徑求得平圓周爲第一數正次以橢圓小半徑爲第一率大半徑自乘小半徑除之轉減小半徑爲第三率迺置第一數以三率乘之一率除之二自乘除之爲第二數正次置第二數以三率乘之一率除之一乘之三乘之四自乘除之爲第三數負次置第三數以三率乘之一率除之三乘之五乘之六自乘除之爲第四數正次置第四數以三率乘之一率除之五乘之七乘之八自乘除之爲第五數負依次遞乘遞除至單位下止第一數正第二數以下

耦數正奇數負正負相減即橢圓周

仁和高雲麟
新陽趙元益　同校

予束髮聞　先生精於算而閉門養痾未便輕謁
丙戌秋予補四元玉鑑細草成假錄于吉甫王君
先生高足也　先生因是獲覩予書卽命　駕見
過引爲忘年交顧　先生十年以長且夙成名德
未敢安也然自是常相過從遂共定開方捷術而
予對數簡法亦過蒙　賞鑒暨戊申冬　先生來
書懇到詳勉無所不盡末言弦矢互求橢圓求周
二種爲愜意之作恐病軀不及蕆事乞代整理彼
時方謂殆謙讓語未以爲意逾年而　先生竟逝
矣去歲　哲嗣建霞大兄以遺書象數一原囑校

補詳加研誦則四卷零分諸論果僅六紙而六卷

橢圓求周亦圖解未立校勘未半頓觸前緒愴然

久之夫以予賦質譾陋何足窺見藩籬特感平生

諄屬之言不能不畢力竭情冀纂明於萬一緣本

序中條目補完零分諸論兼補求周圖解附卷末

餘鄙見所及亦閒綴案語旣成因敘其顚末并錄

先生來書於後以見予之不避僭越嫌蓋自有故

而讀　先生書者當有以諒予之心矣咸豐丁巳

二月錢唐戴煦跋

附錄先生來書

歷學於中西術須一體視之不可有門戶之見又算術古疎今密習此道者往往以闊古自矜不知無古之疎安得有今之密不但無密恐并疎亦不可得究一理立一術以埀於後殊不容易我輩知之而乃肆口相詆乎品學醕美如閣下將來大著成時固無慮是然此病犯之極易願涉筆時加意爲禱弟於此道不過稍涉籓籬其稍可示人者祇弦矢互求及求橢圓弧綫二種只因困於病魔亦已置之自去歲細芸來力言此二種斷不可不成書且催促之兼爲謀措刻貲感其厚意故去夏及秋將弦矢術釋有三冊一

整分起度一半分起度一零分起度皆以兩等邊三角明其象遞加法定其數末乃申論其算法整分半分者均已告成零分者算法未釋尙擬將拙定四術及董氏杜氏諸術別爲一冊詳解之但現在病體頗頓精力日衰弦矢術或勉力成之橢圓則不能著解矣此道無人能助可爲將伯之呼者惟有閣下將來稍有頭緒謹當呈政尙乞代爲整理之是所感禱

右象數一原七卷爲項梅侶先生未竟之稿戴鄂士先生補成之其原委詳見原書序跋中烏程徐莊愍公曾囑張君南坪刻之蘇州未及印行忽遇庚申之亂莊愍殉難南坪入湖州省母亦被賊害不特刊成書板已付劫灰卽底本亦不知流落誰何之手後爲南滙張嘯山先生所得藏諸篋中幾二十年先生晚年爲黃漱蘭學使延主南菁講席余弟若谿侍函丈先生語之曰吾有項氏遺書一種將以贈汝兄無何先生辭講席歸老於松江之錢園以是書寄余其手札云此象數一原係前得

之白下者葢是南垞所藏吾年老嗣孫尙穉久留無所用卽以寄贈項氏此書未見刻本能謀剞劂亦不朽盛業也余受書作函謝之不數月聞先生已歸道山矣噫余在金陵時與先生朝夕聚處及來滬上亦數數相見竝不知其藏有是書及至垂邁之年始肯啟篋出之則其鄭重也可知余旣心儀項戴之學又感先生臨歿授書之意深恐珍惜秘匿或翻至湮沒也適靜涵表弟有高齋彙刻之舉遂慫恿付諸手民而仁和高白叔孝廉重其爲鄉先輩遺著又舉百金以助閱一歲而書甫刊成

先生有知其亦可無憾也已光緒十四年六月十一日金匱華蘅芳跋於滬上之格致書院

